

Τράπεζα θεμάτων Γ' λυκείου – Μαθηματικά κεφάλαιο 1^ο

45 θέματα - 07/07/2024

Θέμα 23106 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$ και η συνεχής συνάρτηση f , ορισμένη στο $[0, \pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε:

$$(g \circ f)(x) = |\sin x|, \text{ για κάθε } x \in [0, \pi].$$

α) Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\eta \mu x|$. (Μονάδες 06)

Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. (Μονάδες 03)

β) Να βρείτε την συνάρτηση f . (Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h: (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x) - x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ (Μονάδες 07)

Θέμα 23196 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

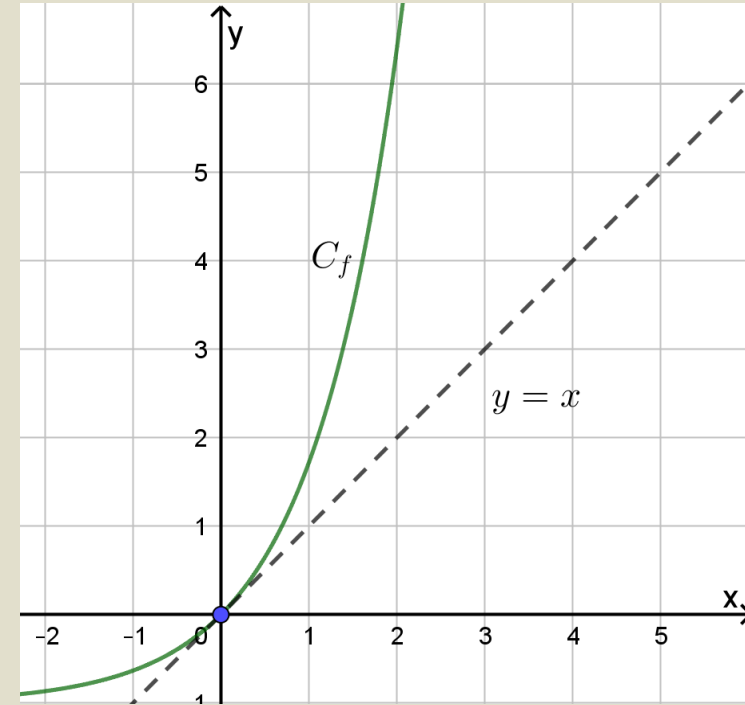
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1} . (Μονάδες 9)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και της ευθείας $y=x$, η οποία εφάπτεται της C_f στο μοναδικό κοινό τους σημείο, την αρχή των αξόνων. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .

(Μονάδες 9)



Θέμα 23198 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - 1$, $x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1} . (Μονάδες 9)

Έστω $f^{-1}(x) = (x + 1)^2$, $x \geq -1$

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f , f^{-1} . (Μονάδες 9)

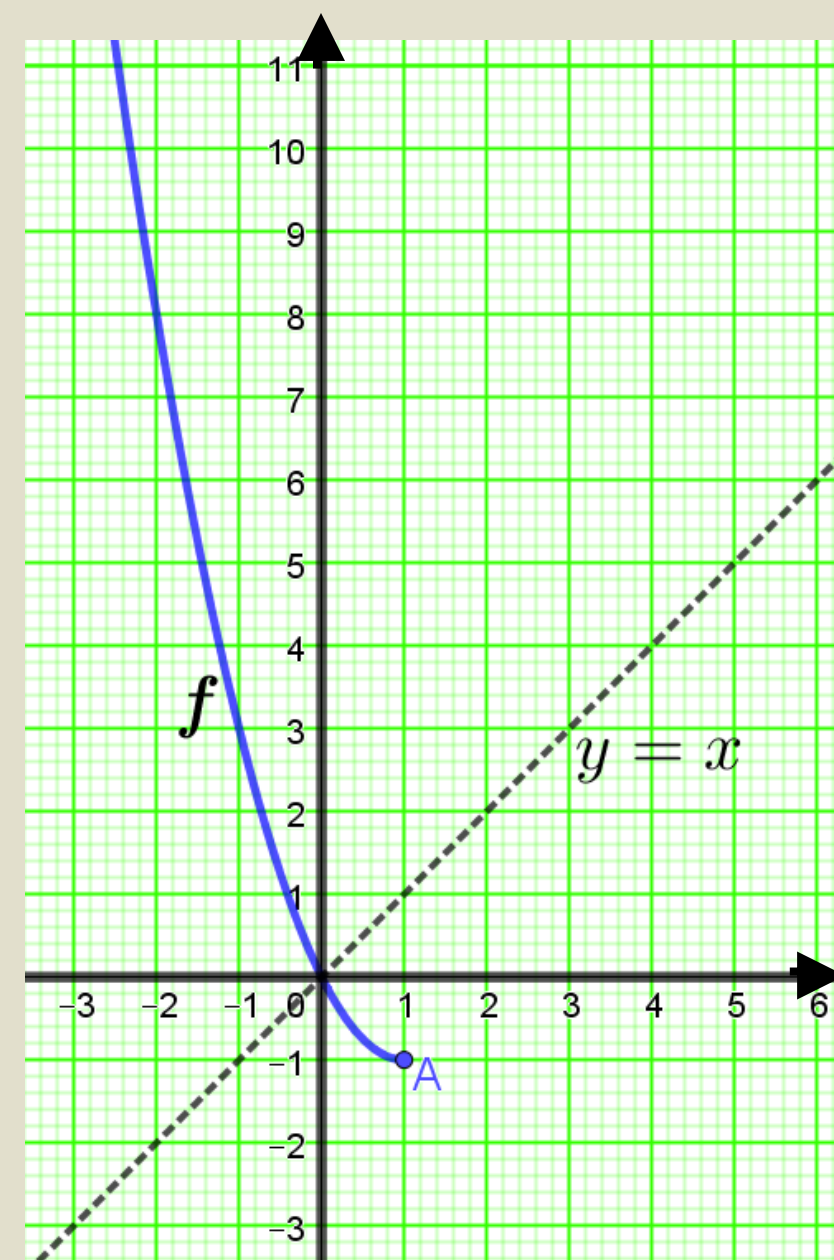
Θέμα 23209 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2 - 1$, $x \leq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να μεταφέρετε στην κόλλα σας ή στο φύλλο απαντήσεων το παρακάτω σχήμα με την γραφική παράσταση της f και το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} . (Μονάδες 8)



Θέμα 23216 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα xx' και για ποιες είναι πάνω από τον xx' . (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$ (Μονάδες 10)

Θέμα 23217 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x - 1)$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (Μονάδες 7)

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε

i. το πεδίο ορισμού της $f \cdot g$ (Μονάδες 4)

ii. το $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$. (Μονάδες 6)

Θέμα 23314 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη -2 και τον άξονα $y'y$ σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη 2 .

α) Από την γραφική παράσταση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να προσδιορίσετε τα όρια:

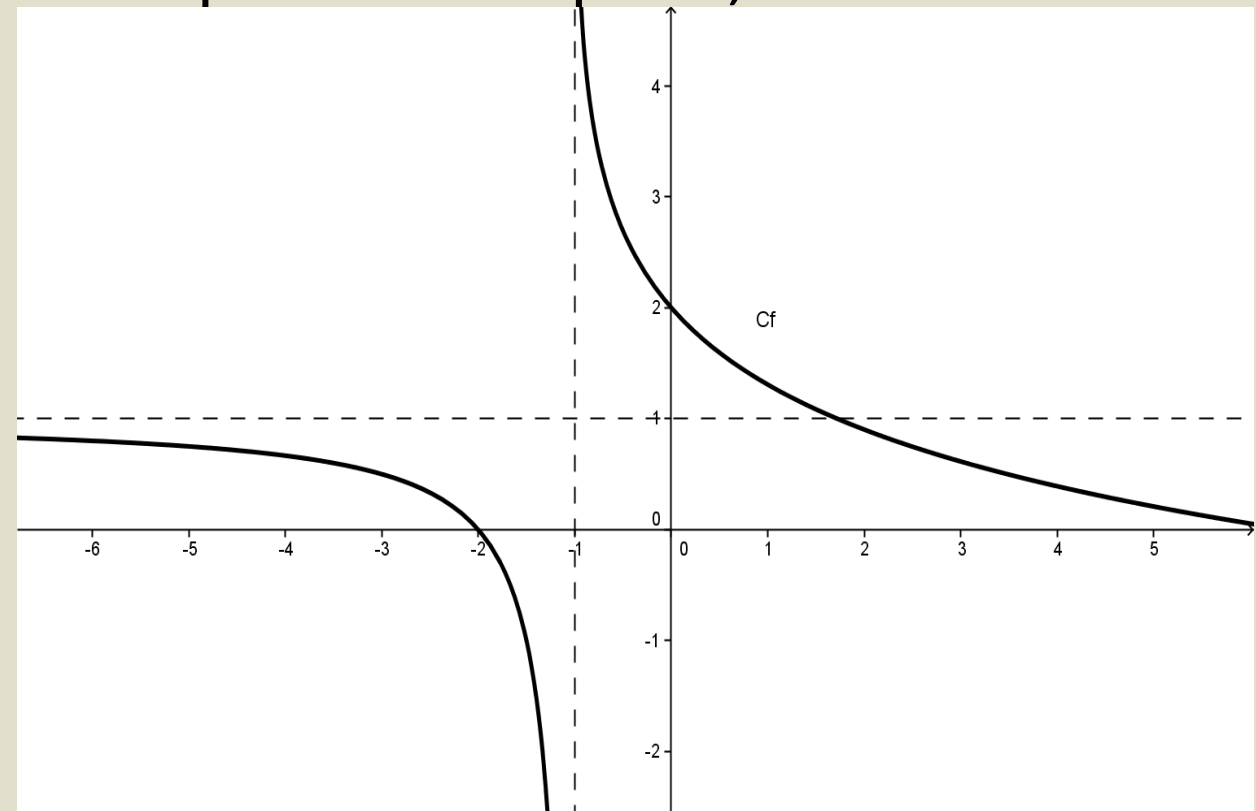
i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{f(x)}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln(f(x))$ (Μονάδες 7) και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Θέμα 23641 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) < f(x)$. (Μονάδες 08)

β) Αν $\alpha^2 < \alpha$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ([f(\alpha^2 - \alpha) - f(0)] x) = -\infty$$

(Μονάδες 09)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x - 1) = f(0)$. (Μονάδες 08)

Θέμα 23642 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^3 + x + 1.$$

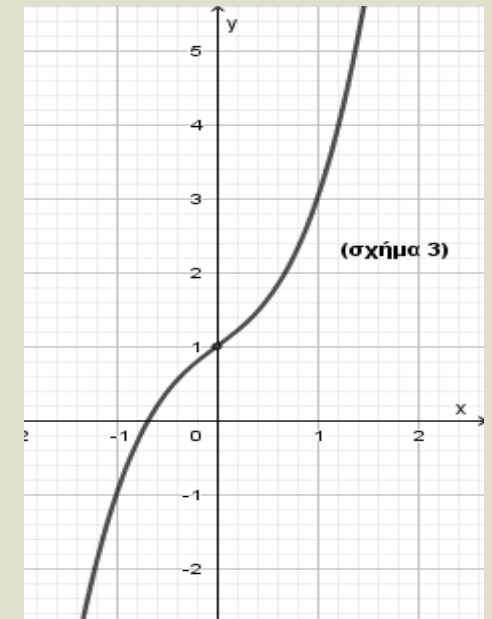
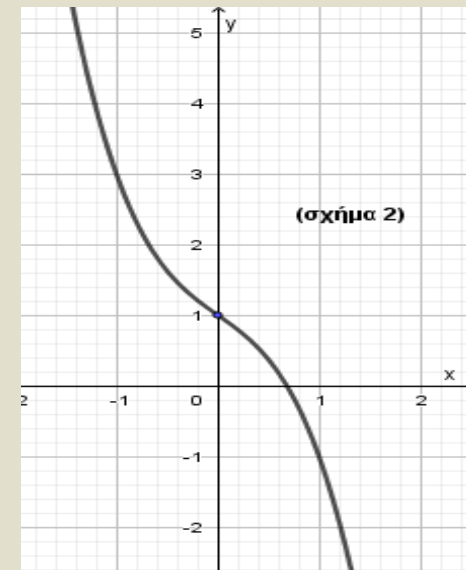
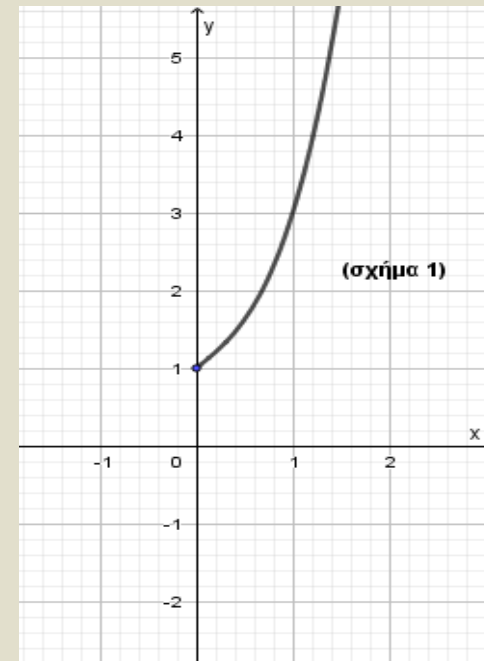
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 07)

β) Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $|f|$. (Μονάδες 06)

Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $|f|$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $|x^3 + x + 1| = 2023$.

(Μονάδες 05)



Θέμα 24130 - 2ο Ενδεικτική

Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο

$$f(x) = \sqrt{x-1} + 3, \quad x \geq 1.$$

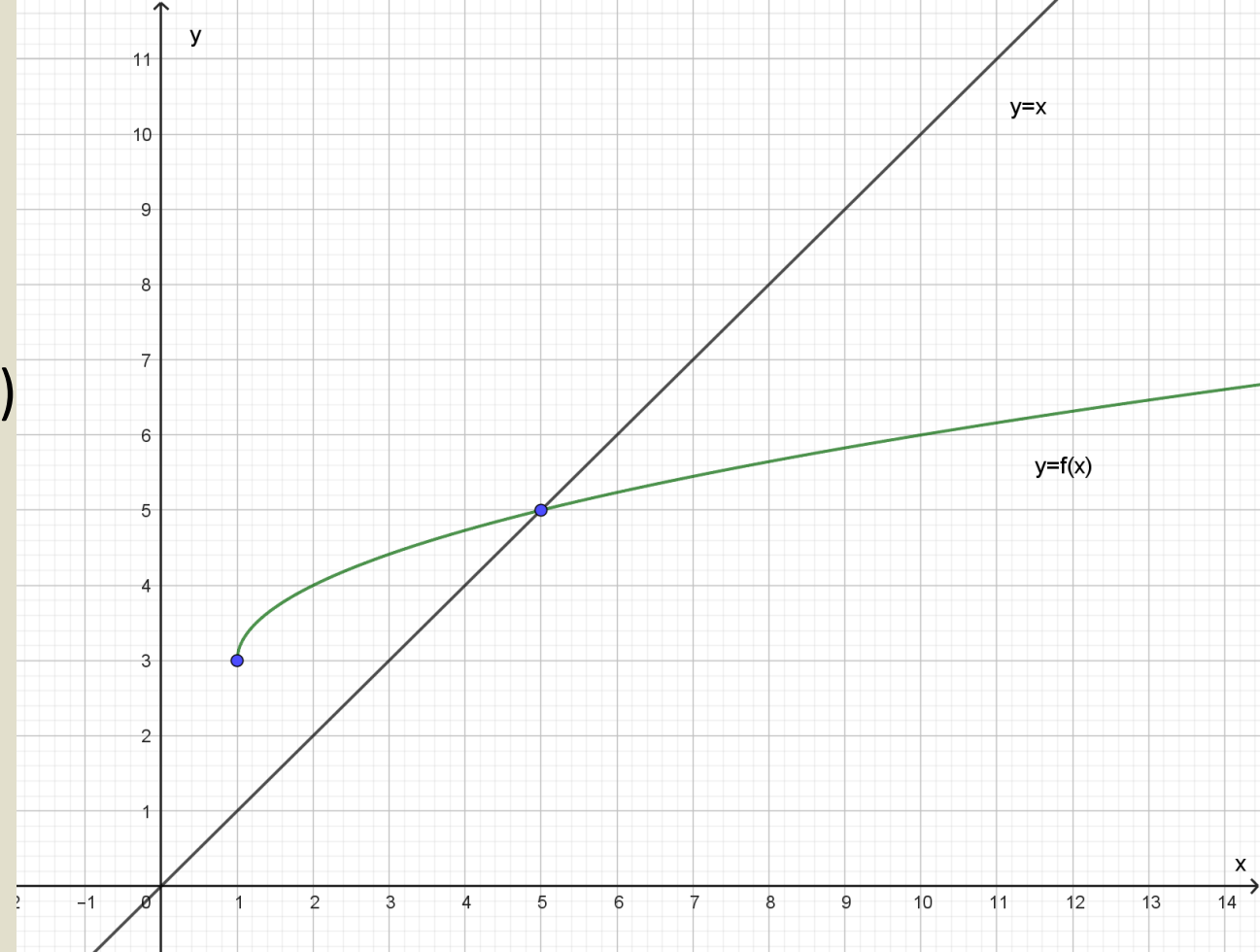
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών καθώς και την αντίστροφη της f .

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και η διχοτόμος $y = x$ της γωνίας xOy . Αφού μεταφέρετε το σχέδιο στην κόλλα σας, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f^{-1} και με βάση το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, f^{-1} .

(Μονάδες 08)



Θέμα 24569 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f = [0,1]$. (Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι “1 – 1”.
(Μονάδες 10)

Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = 0, x \in [0,1]$.
(Μονάδες 10)

Θέμα 24703 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $x \in (-\infty, 1]$.

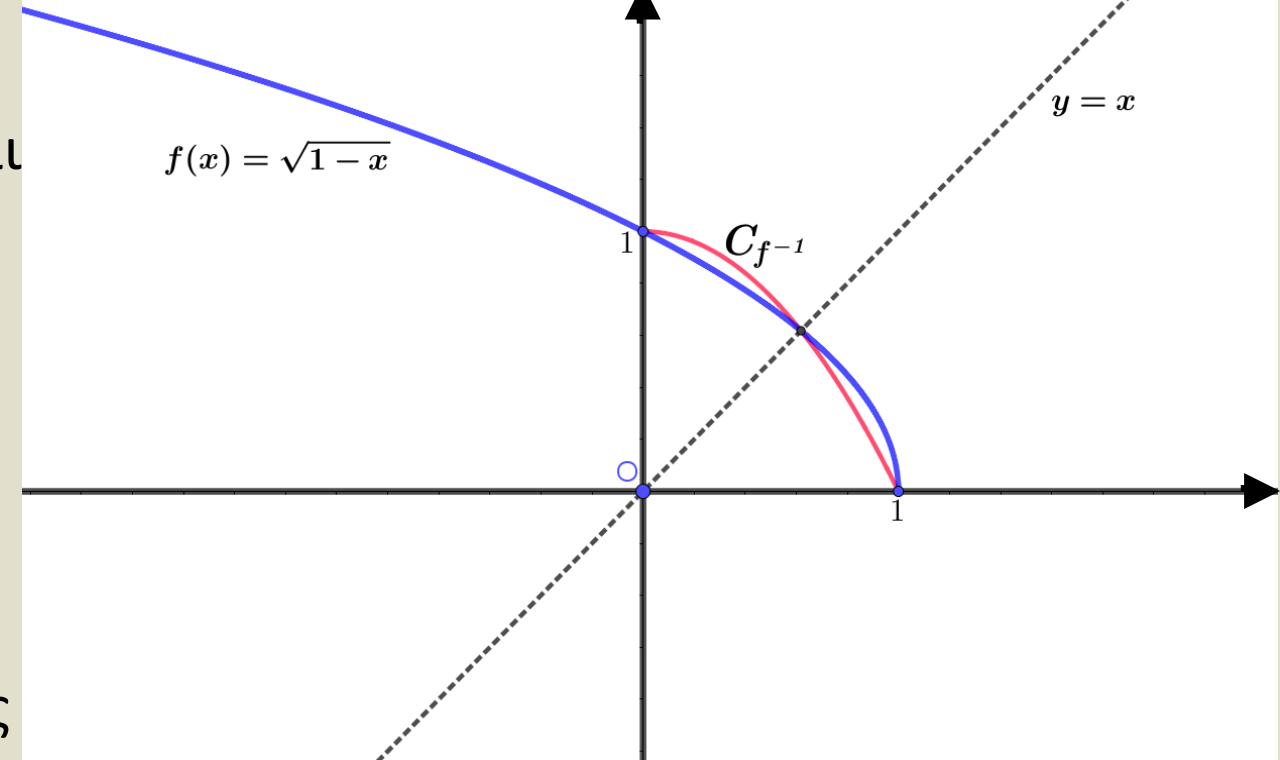
α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} . (Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της f^{-1} .

Να μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων το παραπάνω σχήμα και το οποίο να συμπληρώσετε με την υπόλοιπη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} . (Μονάδες 7)



Θέμα 24761 - 3ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2023 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2022$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2022$. (Μονάδες 10)

Θέμα 24767 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
(Μονάδες 12)

Θέμα 24768 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = \sqrt{4x - 3}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = g \circ f$. (Μονάδες 9)

γ) Αν $h(x) = |2x - 1|$ είναι η σύνθεση του ερωτήματος β), να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$ (Μονάδες 10)

Θέμα 24991 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -2\ln x + 1, x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} . (Μονάδες 09)

γ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = 1 - \ln x^2$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$.

(Μονάδες 08)

Θέμα 25749 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $D_f = [0,2) \cup (2,3) \cup (3,5]$, η οποία τέμνει τον άξονα x' σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες $(0,0)$ και $(4,0)$. Επίσης, δίνεται ότι $f(1)=1$.

Με βάση το παρακάτω σχήμα:

α) να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.

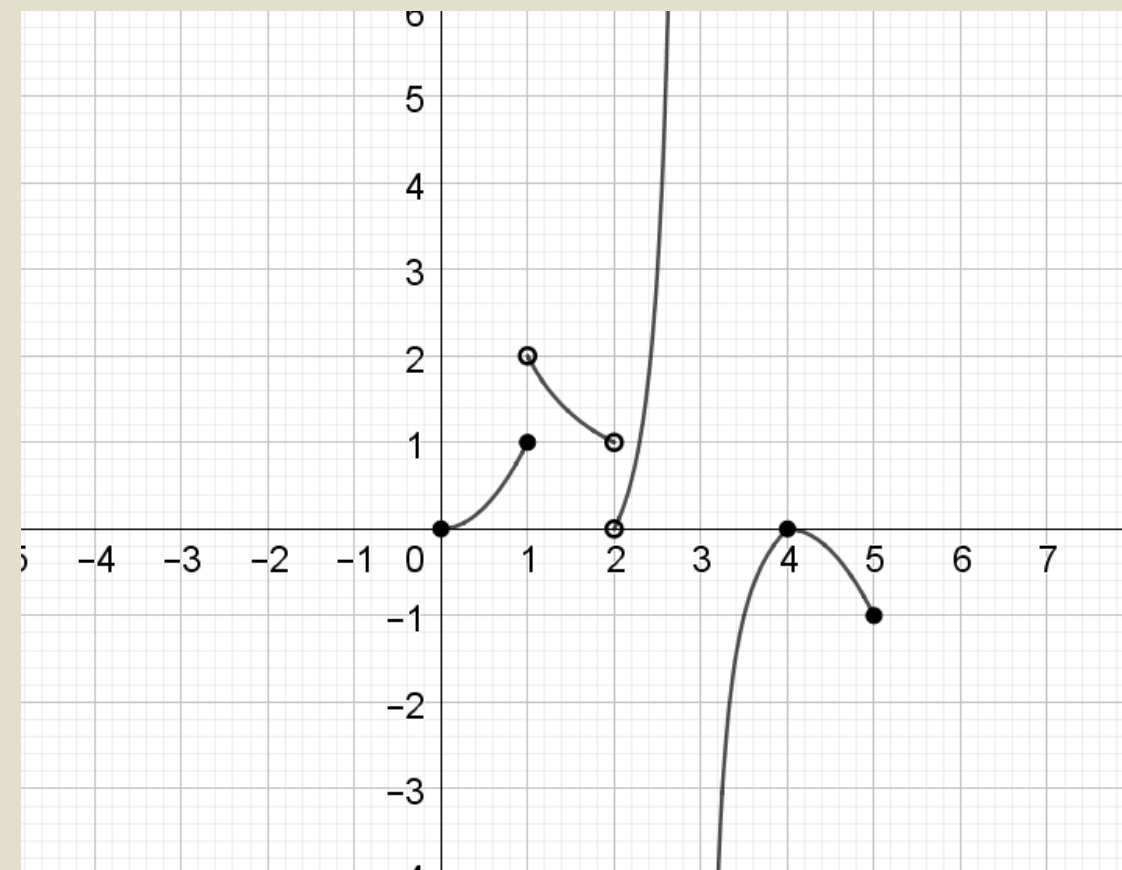
(Μονάδες 8)

β) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) να βρείτε τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 10)



Θέμα 26602 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ και $g(x) = x - 2$.

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

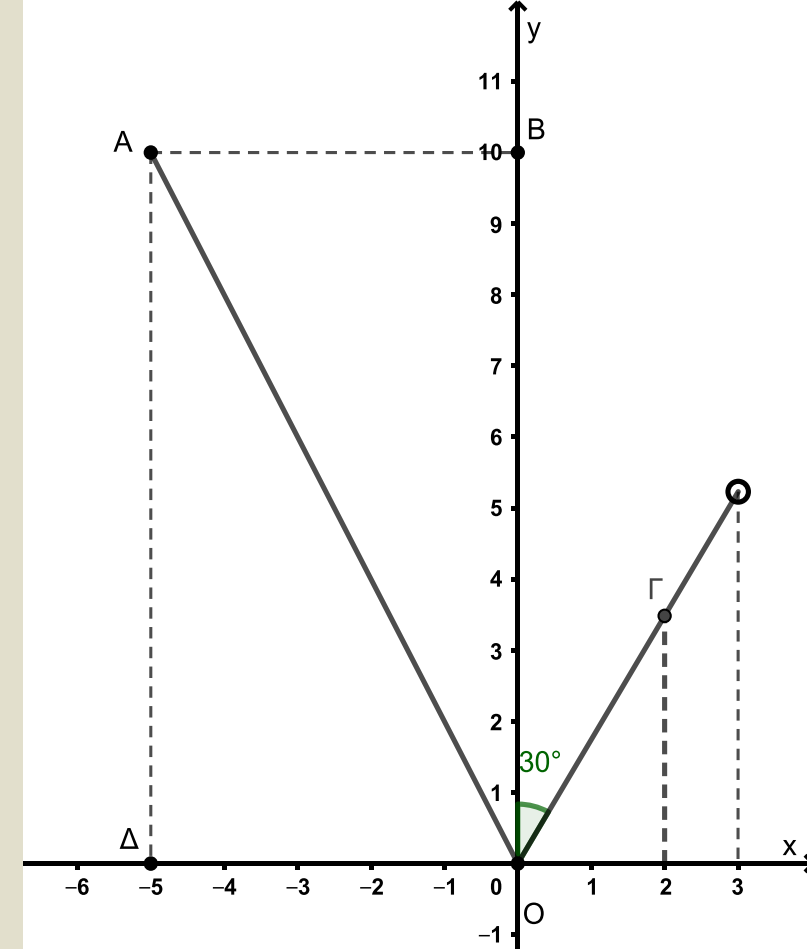
β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h , με $h(x) = |g(x)|$. (Μονάδες 7)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f και h . (Μονάδες 10)

Θέμα 26603 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)
- β) Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)
- γ) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Γ ; (Μονάδες 5)



Θέμα 26604 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 4

Δυο εταιρείες E1 και E2 δραστηριοποιούνται στο χώρο της γεώτρησης νερού. Η πολιτική των χρεώσεων προς τους πελάτες τους είναι διαφορετική. Η εταιρεία E1 χρεώνει 1500 ευρώ για την εκπόνηση της αρχικής μελέτης και 200 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μέχρι τα 15 πρώτα μέτρα. Αν δεν βρεθεί νερό μέχρι τα 15 μέτρα, τότε αλλάζει τη χρέωση από 200 σε 250 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μετά τα 15 πρώτα. Η E2 χρεώνει 300 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους.

α) Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία E1 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε:

Τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

Το ποσό που θα χρεώσει η εταιρεία E1 σε πελάτη που χρειάστηκε να φτάσει σε βάθος 12 μέτρων μέχρι να βρει νερό. (Μονάδες 2)

Αν κάποιος πελάτης ξόδεψε για τη γεώτρησή του 5050 ευρώ, σε ποιο βάθος έφτασε; (Μονάδες 2)

β) Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία E2 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g . (Μονάδες 3)

γ) Σε ποιο βάθος σταμάτησαν τη γεώτρησή τους δυο γείτονες που συνεργάστηκαν με διαφορετική εταιρεία ο καθένας τους, βρήκαν νερό στο ίδιο βάθος και πλήρωσαν ακριβώς το ίδιο ποσό; (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές της μεταβλητής x (μέτρα βάθους) συμφέρει η επιλογή της εταιρείας E1; (Μονάδες 6)

Θέμα 26637 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \ln x$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \cdot g$. (Μονάδες 9)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$, που ορίσατε στα ερωτήματα (α) και (β). (Μονάδες 7)

Θέμα 26640 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^3 + 2x$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

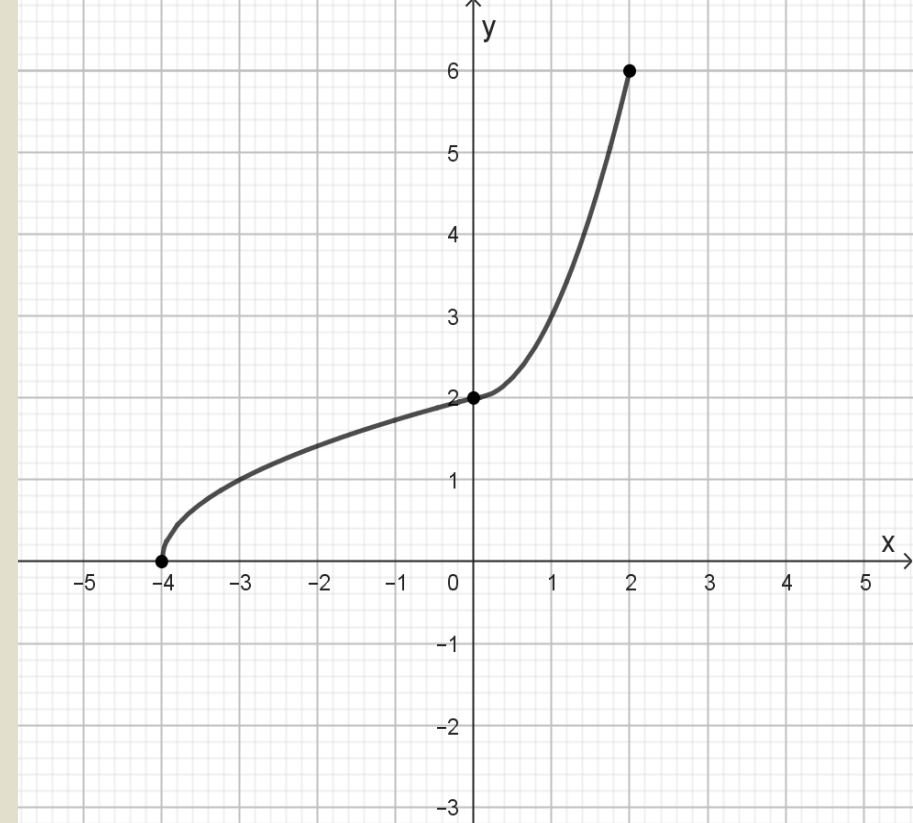
γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 5)

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$. (Μονάδες 5)

Θέμα 27277 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας συνάρτησης f . Με τη βοήθεια του σχήματος να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f^{-1}(f(6))$. (Μονάδες 8)
- γ) Στο σύστημα αξόνων που ακολουθεί να χαράξετε την γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 7)



Θέμα 27317 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [0, 2]$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο $[0, 2]$
(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, 2]$. (Μονάδες 05)

Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . (Μονάδες 03)

Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες. (Μονάδες 07)

Θέμα 27318 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο έξι και ο οριζόντιος άξονας εφάπτεται στη γραφική της παράσταση στο σημείο αυτό.

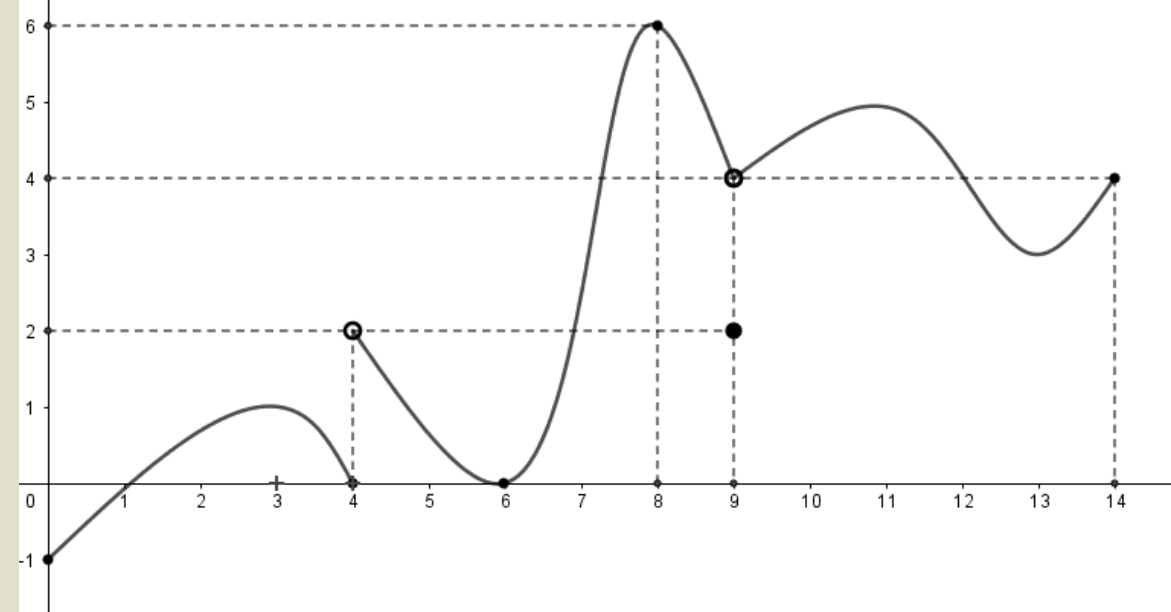
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.
(Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 9} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 14} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

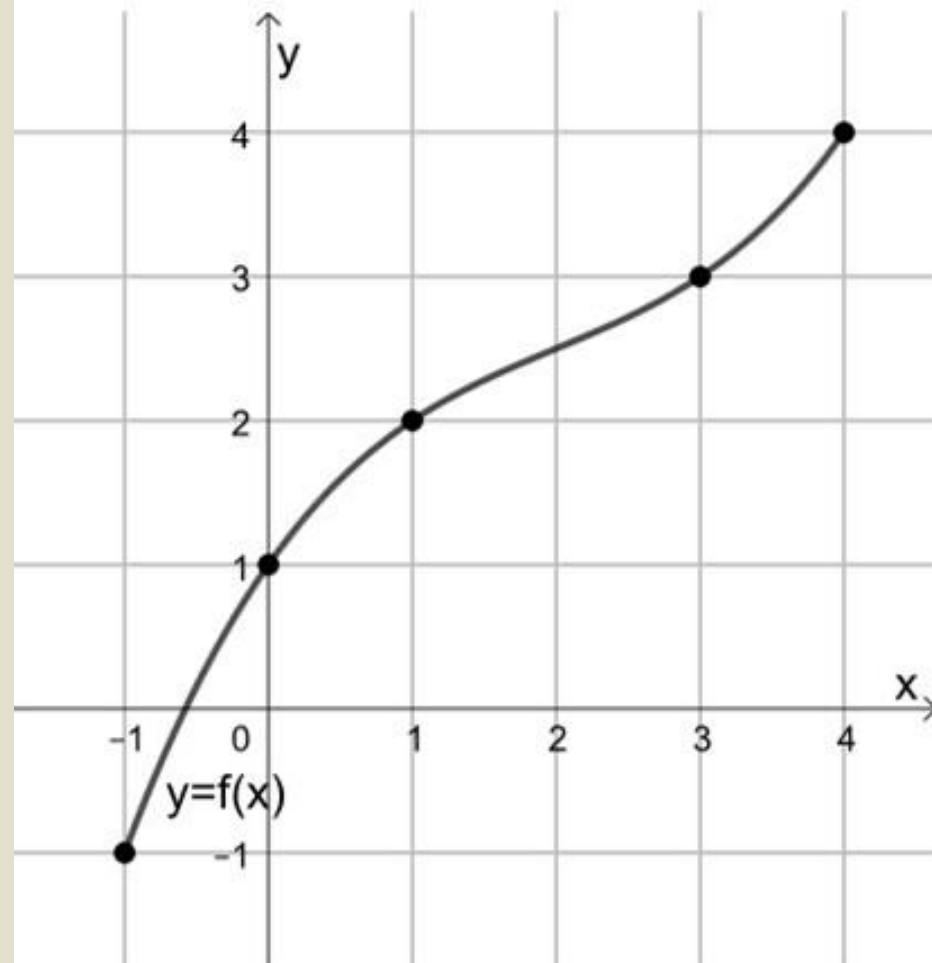


Θέμα 28299 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = [-1, 4]$ και με γραφική παράσταση C_f που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Μελετώντας τη C_f :

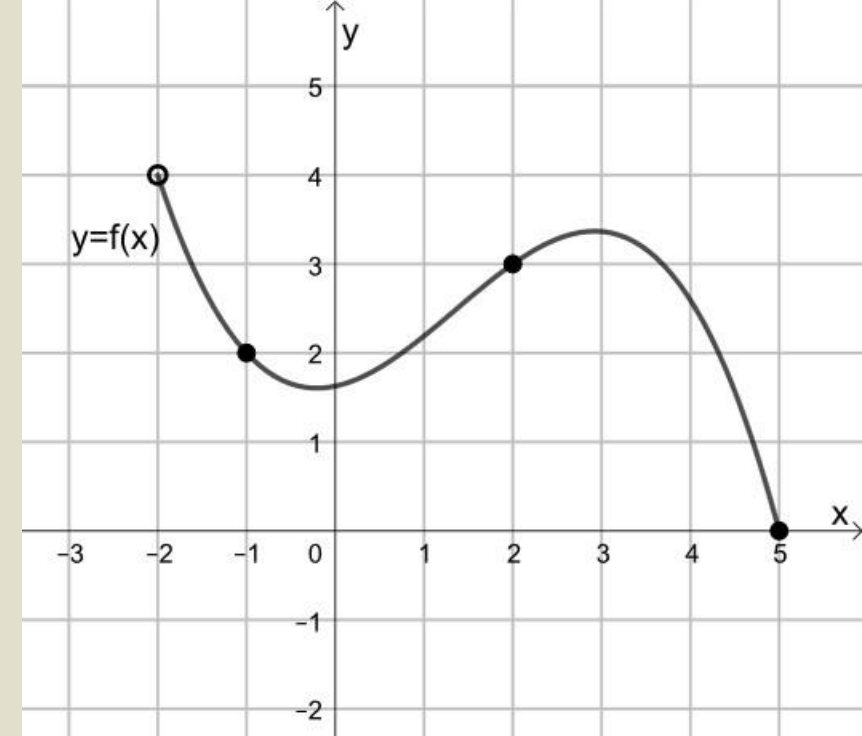
- α) να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f ,
(Μονάδες 8)
- β) να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$, (Μονάδες 8)
- γ) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} . (Μονάδες 9)



Θέμα 28300 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη γραφική παράσταση της f να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f ,
(Μονάδες 6)
- β) τις τιμές $f(-1)$, $f(2)$ και $f(5)$,
(Μονάδες 6)
- γ) το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f ,
εφόσον υπάρχουν, (Μονάδες 7)
- δ) την τιμή της σύνθεσης $f \circ f$ στο -1 .



Θέμα 28304 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

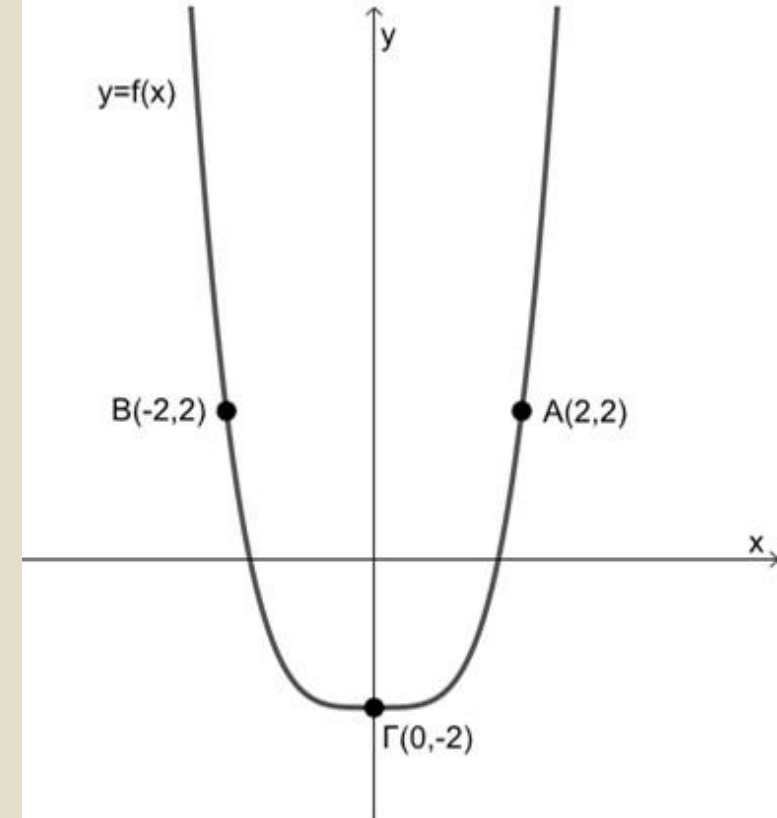
Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, διέρχεται από τα σημεία $A(2, 2)$, $B(-2, 2)$ και $\Gamma(0, -2)$.

Έστω επίσης η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = |x|$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(-2)$ και $f(0)$.
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές $(g \circ f)(2)$, $(g \circ f)(-2)$ και $(g \circ f)(0)$. (Μονάδες 8)

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g \circ f$. (Μονάδες 9)



Θέμα 28477 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = e^{3x+2}, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g . (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε την συνάρτηση $g \circ f$. (Μονάδες 08)

γ) Αν $g(f(x)) = 6x + 4, x \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x) - \eta \mu^2 x - 4}{x}$$

(Μονάδες 13)

Θέμα 28684 - 3ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \kappa, \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}.$$

Αν επιπλέον ισχύει ότι $xf(x) \leq \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 2$ (Μονάδες 04)

β) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$. (Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε το $f(0)$. (Μονάδες 04)

δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού:

$$\left| f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \right| = -f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \text{ κοντά στο } 0$$

Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 08)

Θέμα 29830 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

$f \cdot g$ (Μονάδες 7)

$\frac{f}{g}$ (Μονάδες 8)

Θέμα 29831 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το διάστημα $(-1, 1)$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$. (Μονάδες 8)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $(f \circ g)(x) = -\frac{1}{x}$, να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$, $x \in \mathbb{R}^*$. (Μονάδες 10)

Θέμα 29832 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ και $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}^*$ και της g το διάστημα $(-1, 1)$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$.
(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $(f \circ g)(x)$.
(Μονάδες 9)

Θέμα 29834 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9x^2 + 16} - \frac{5}{2}\ln(8x + 1)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι $f(0) > 0$ και $f(1) < 0$. (Μονάδες 8)
- γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$. (Μονάδες 9)

Θέμα 29835 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = 2 - x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για $x \in (-\infty, 3]$ η $(f \circ g)(x) = \sqrt{3-x} - 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = (f \circ g)(x)$ είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφό της. (Μονάδες 10)

Θέμα 29838 - 4ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $xf(x) + \sigma\upsilon\nu x = 1 - x^2\eta\mu\frac{1}{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$ (Μονάδες 4)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$. (Μονάδες 7)

Θέμα 29926 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \ln(x-2) + 5$ για κάθε $x > 2$ και $g(x) = 2x-1$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη. (Μονάδες 6)

Να βρείτε τη συνάρτηση g^{-1} . (Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$.
(Μονάδες 6)

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$. (Μονάδες 6)

Θέμα 31528 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 14)

β) Να βρείτε την f^{-1} . (Μονάδες 11)

Θέμα 31548 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$|f(x) - 2x| \leq (x - 1)^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι : α) $f(1) = 2$. (Μονάδες 10)

β) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. (Μονάδες 10)

γ) η f είναι συνεχής στο 1. (Μονάδες 5)

Θέμα 32695 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, σύνολο τιμών το $[-\frac{1}{2}, 1)$ και τύπο $f(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+2}$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $[-\frac{1}{2}, 1)$, σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και τύπο $g(x) = \left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^2$. Με δεδομένο ότι η συνάρτηση f είναι 1-1,

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f .

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε x που ανήκει στο $[0,1)$.

(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 07)

Θέμα 35168 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g και h ώστε :

$$f(x) = \ln(1 + e^x), \quad g(x) = 2\ln x \text{ και } h(x) = \ln(1 + x^2).$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
(Μονάδες 8)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$. (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f \circ g$ και h είναι ίσες.
(Μονάδες 8)

Θέμα 35170 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ώστε:

$$f(x) = \ln(1 + e^x) \text{ και } g(x) = 2\ln x.$$

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
(Μονάδες 8)
- β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f + g$. (Μονάδες 8)
- γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f + g$ ως προς τη μονοτονία.
(Μονάδες 9)

Θέμα 35171 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνονται οι συναρτήσεις g και h ώστε :

$$g(x) = 2\ln x, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad h(x) = \ln(1 + x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι :

Η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη (Μονάδες 5)

$$g^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}, \quad \text{με } x \in \mathbb{R}. \quad (\text{Μονάδες 10})$$

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h \circ g^{-1}$. (Μονάδες 10)

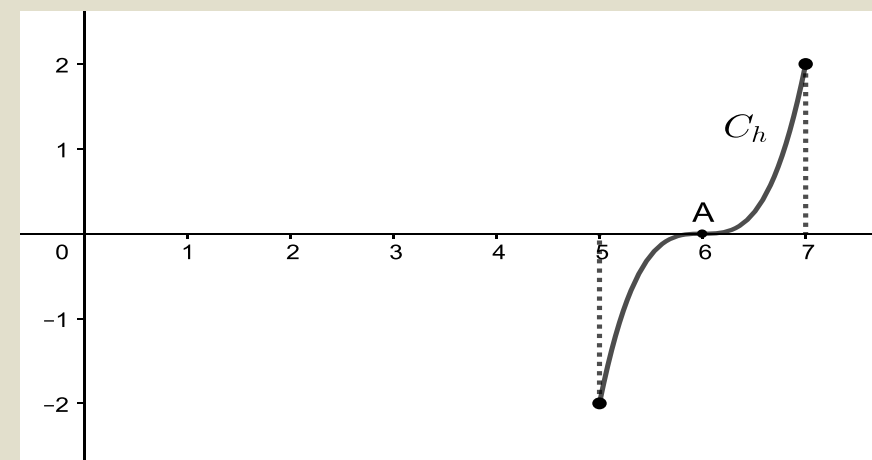
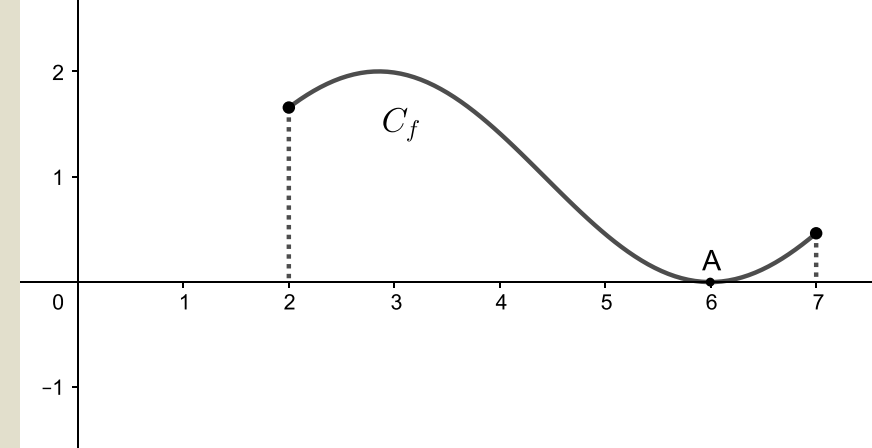
Θέμα 36839 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 συνεχών συναρτήσεων των f και h , οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h . (Μονάδες 06)
- β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο πεδίο ορισμού τους. (Μονάδες 10)

Παίρνουν την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τους. (Μονάδες 09)



Θέμα 34024 - 2ο Ενδεικτική Απάντηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^{2x}}$. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε γραφική παράσταση:

α) Να βρείτε

i. Την μονοτονία της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)

ii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 8)