

Θέματα από την Τράπεζα θεμάτων 2014-15
1ο Κεφάλαιο - Διανύσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Θ Ε Μ Α 2^ο

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του κ .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{\beta} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ και $\vec{\gamma} = (7, 3)$

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι μη συγγραμμικά ανά δύο

(Μονάδες 10)

β) Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα σημεία A(2, 3), B(-1, 5) και Γ(-2, -4).

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το συμμετρικό Δ του B ως προς το μέσο M της ΑΓ.

(Μονάδες 10)

γ) Τι σχήμα είναι το ΑΒΓΔ; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τα σημεία A(1+2α, 4α-2) και B(5α+1, -α), $a \in \mathbb{Z}$.

α) Να γράψετε το $|\vec{AB}|$ συναρτήσει του α και να βρείτε το α ώστε $|\vec{AB}| = 10$.

(Μονάδες 12)

Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας-Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών

β) Έστω $a=2$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές με βάση την AB .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 5

Έστω $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν:

$$3|\vec{a}| + |\vec{\beta}| = 9, \quad 2|\vec{a}| - |\vec{\beta}| = 1 \quad \text{και} \quad (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$$

α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{\beta}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 6

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 3)$ και $\vec{\beta} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε την προβολή του $\vec{a}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) Να αναλύσετε το $\vec{a}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με το $\vec{\beta}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 7

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v} = (x^2, x-1)$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 8

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, \sqrt{3})$ και $\vec{b} = (\sqrt{3}, 3)$. Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία $(\vec{a}, \vec{b})$

(Μονάδες 10)

β) Το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{a}^2 \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \cdot \vec{a}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 9

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ με $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα εξής:

α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$ και κατόπιν την τιμή της παράστασης

$$\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot (2\vec{b})$$

(Μονάδες 10)

β) Το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{a} - 2\vec{b}$ και $\vec{b} + 2\vec{a}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 10

Έστω $\vec{a}$, $\vec{b}$ δυο διανύσματα με $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$

α) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{a} \cdot \vec{b}$ και $\vec{b} \cdot \vec{u}$.

(Μονάδες 16)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 11

Θεωρούμε τα σημεία $A(a+1, 3)$, $B(a, 4)$ και $\Gamma(-4, 5a+4)$, $a \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του a , τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $a=1$, να βρείτε αριθμό λ ώστε $\vec{A\Gamma} = \lambda \vec{AB}$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 12

Θεωρούμε τα σημεία P, Λ, K και M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση:

$$5P\vec{\Lambda} = 2P\vec{K} + 3P\vec{M}$$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ και M είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

β) Για τα παραπάνω σημεία K, Λ και M να δείξετε ότι ισχύει:

$$2A\vec{\Lambda} + 3B\vec{\Lambda} + 2M\vec{B} = A\vec{K} + A\vec{M} + B\vec{K}$$

, όπου A και B είναι σημεία του επιπέδου.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 13

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{a}| = 4$ και $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -8$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{a}, \vec{\beta})$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} + 2\vec{a} = \vec{0}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 14

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = 1$, $(\vec{a} + 2\vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} = 7$ και $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -1$.

α) Να υπολογίσετε τα $\vec{a}^2$ και $|\vec{\beta}|$.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} + 2\vec{\beta}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την προβολή του $\vec{a} + 2\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 15

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 7)$ και $\vec{\beta} = (2, 4)$

α) Να βρεθεί η προβολή του $\vec{a}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

Τράπεζα Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας-Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών

β) Να αναλύσετε το σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες, η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 16

Δίνονται τα διανύσματα $0\vec{A} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $0\vec{B} = 3\vec{i} + \vec{j}$ και $0\vec{\Gamma} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$, όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων και αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $A\vec{B}$ και $B\vec{\Gamma}$

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B και Γ μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 17

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και E, Z σημεία τέτοια ώστε: $A\vec{E} = \frac{2}{5}A\vec{\Delta}$, $A\vec{Z} = \frac{2}{7}A\vec{\Gamma}$.

α) Να γράψετε τα διανύσματα $E\vec{Z}$ και $Z\vec{B}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $A\vec{B}$ και $A\vec{\Delta}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Z και E είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 18

Δίνεται τρίγωνο ABΓ και σημεία Δ και E του επιπέδου τέτοια, ώστε $A\vec{\Delta} = 2A\vec{B} + 5A\vec{\Gamma}$ και $A\vec{E} = 5A\vec{B} + 2A\vec{\Gamma}$

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\Delta\vec{E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $A\vec{B}$ και $A\vec{\Gamma}$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\Delta\vec{E}$ και $B\vec{\Gamma}$ είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 19

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$ και $\vec{A\Gamma} = (1, 6)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma}$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ να είναι κάθετα.

(Μονάδες 9)

γ) Για $\kappa = 1$ να βρείτε το διάνυσμα $\vec{B\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 20

Έστω τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία : $2|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a} + \vec{\beta}$ και $\vec{a} - \vec{\beta}$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 21

Σε τρίγωνο ABΓ είναι: $\vec{AB} = (-4, -6)$, $\vec{A\Gamma} = (2, -8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AM}$, όπου AM είναι η διάμεσος του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι οξεία.

(Μονάδες 10)

γ) Αν στο τρίγωνο ABΓ επιπλέον ισχύει $A(3, 1)$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του B και Γ.

(Μονάδες 8)

Θ Ε Μ Α 4^ο

ΘΕΜΑ 22

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες: $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ και $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| - |\vec{v}|$
(Μονάδες 10)

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{a}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$.

i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$
(Μονάδες 8)

ii) Να αποδείξετε ότι: $7\vec{a} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$
(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 23

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ και

$$\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{a} - \vec{\beta}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$
(Μονάδες 3)

β) Αν ισχύει $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\kappa = -2$
(Μονάδες 6)

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$
(Μονάδες 8)

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{a} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.
(Μονάδες 8)