

Θέματα από την Τράπεζα θεμάτων 2021-22

Γεωμετρικοί τόποι

Ανισοτικές σχέσεις

Έως ενότητα 3.11.

1. Θέμα 2 -1574
2. Θέμα 2 -1585
3. Θέμα 3 -12069
4. Θέμα 2 -1553
5. Θέμα 2 -1558
6. Θέμα 2 -1568
7. Θέμα 2 -1578
8. Θέμα 2 -1587
9. Θέμα 2 -1658
10. Θέμα 2 -1664
11. Θέμα 4 -1725
12. Θέμα 4 -1749
13. Θέμα 4 -1875

## ΘΕΜΑ 2

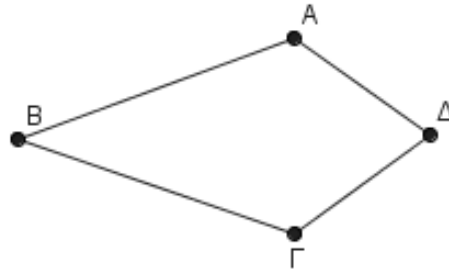
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος της γωνίας του  $\hat{\Gamma}$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $AB$  στο  $\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta E \perp B\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $A\Gamma\Delta$  και  $\Delta\Gamma E$  είναι ίσα. (Μονάδες 13)
- β) Το  $\Gamma$  ισαπέχει από τα σημεία  $A$  και  $E$  και η ευθεία  $\Gamma\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $AE$ . (Μονάδες 12)

## ΘΕΜΑ 2

Έστω κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $BA = B\Gamma$  και  $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ .



Να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{B\hat{A}\Gamma} = \hat{B\hat{\Gamma}A}$ .

(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

γ) Η ευθεία  $B\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $A\Gamma$ .

(Μονάδες 7)

### ΘΕΜΑ 3

Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) παίρνουμε στην πλευρά  $AB$  σημείο  $\Delta$ , ώστε  $\Delta B = 2\Delta\Delta$ , και στην πλευρά  $A\Gamma$  σημείο  $E$ , ώστε  $E\Gamma = 2A\Delta$ . Το  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τμήματα  $\Delta B$  και  $E\Gamma$  είναι ίσα. (Μονάδες 6)

ii. Το τρίγωνο  $M\Delta E$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Αν  $P$  το σημείο τομής των τμημάτων  $BE$  και  $\Gamma\Delta$  να δείξετε ότι:

i. Οι γωνίες  $\widehat{B\Gamma E}$  και  $\widehat{B\Gamma\Delta}$  είναι ίσες. (Μονάδες 6)

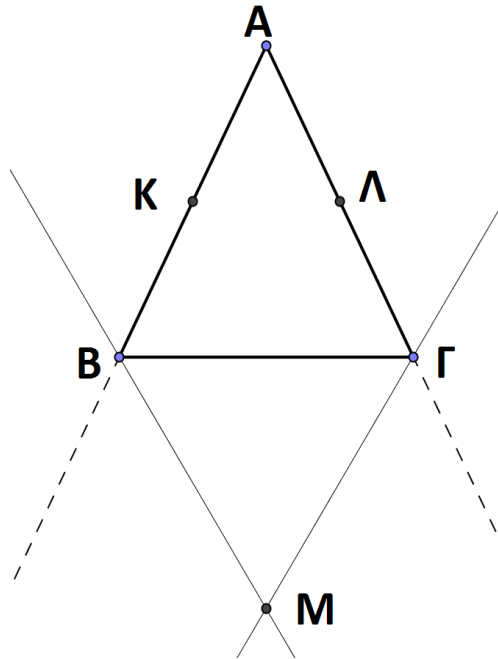
ii. Το τμήμα  $PM$  διχοτομεί τη γωνία  $B\hat{P}\Gamma$ . (Μονάδες 7)

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών  $B$  και  $\Gamma$  τέμνονται στο σημείο  $M$  και  $K, \Lambda$  είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$ .

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $BM\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $MB=M\Gamma$ . (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι  $MK=M\Lambda$ . (Μονάδες 13)



## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ) και  $I$  το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $B\Gamma I$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- β) Οι γωνίες  $\hat{A\Gamma I}$  και  $\hat{A\Gamma B}$  είναι ίσες. (Μονάδες 10)
- γ) Η ευθεία  $AI$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $B\Gamma$ . (Μονάδες 7)

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα ύψη του  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  που αντιστοιχούν στις πλευρές του  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) Αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB=A\Gamma$ , τότε τα ύψη  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Αν τα ύψη  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  είναι ίσα, τότε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $A\Gamma=AB$ .

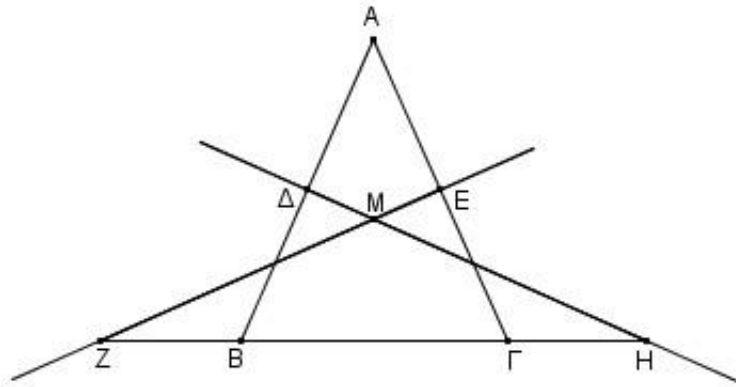
(Μονάδες 13)

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο  $M$  και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση  $B\Gamma$  στα  $Z$  και  $H$ .

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $\Delta B\eta$  και  $E\mathcal{Z}$ . (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $M\mathcal{Z}\eta$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



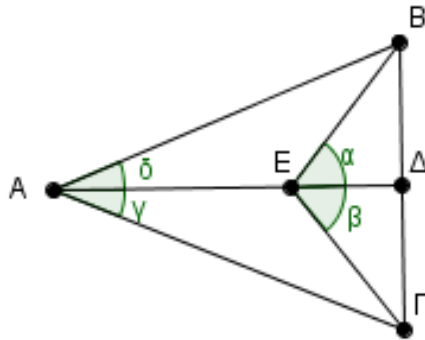
## ΘΕΜΑ 2

Αν για το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) του σχήματος ισχύουν  $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$  και  $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ , να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α) Τα τρίγωνα  $AEB$  και  $AEG$  είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο  $ΓΕΒ$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία  $A\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $B\Gamma$ . (Μονάδες 9)



## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και από το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε τα κάθετα τμήματα  $M\Delta$  και  $ME$  στις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν  $M\Delta = ME$  τότε:

i. τα τρίγωνα  $B\Delta M$  και  $\Gamma EM$  είναι ίσα.

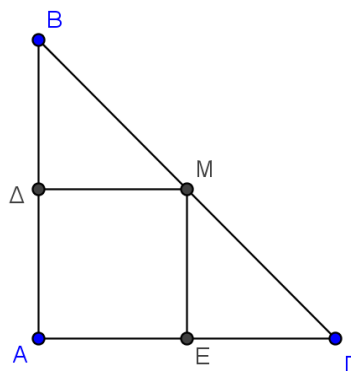
(Μονάδες 8)

ii. το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

β) Αν  $AB = A\Gamma$  τότε  $M\Delta = ME$ .

(Μονάδες 8)



## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ) και τις διαμέσους του  $BK$  και  $\Gamma\Lambda$ , οι οποίοι τέμνονται στο σημείο  $\Theta$ .

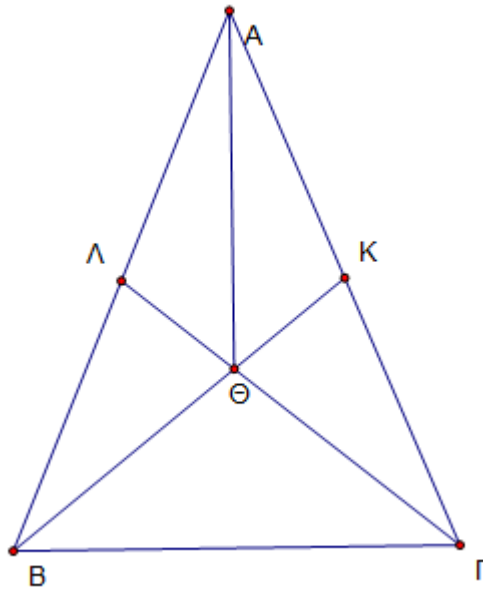
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι διάμεσοι  $BK$  και  $\Gamma\Lambda$  είναι ίσες.

(Μονάδες 12)

β) Τα τρίγωνα  $AB\Theta$  και  $A\Gamma\Theta$  είναι ίσα

(Μονάδες 13)



#### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξεία γωνία  $\hat{xOy}$  και δύο ομόκεντροι κύκλοι  $(O, \rho_1)$  και  $(O, \rho_2)$  με  $\rho_1 < \rho_2$ , που τέμνουν την  $Ox$  στα σημεία  $K, A$  και την  $Oy$  στα  $\Lambda, B$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α)  $AL = BK$ .

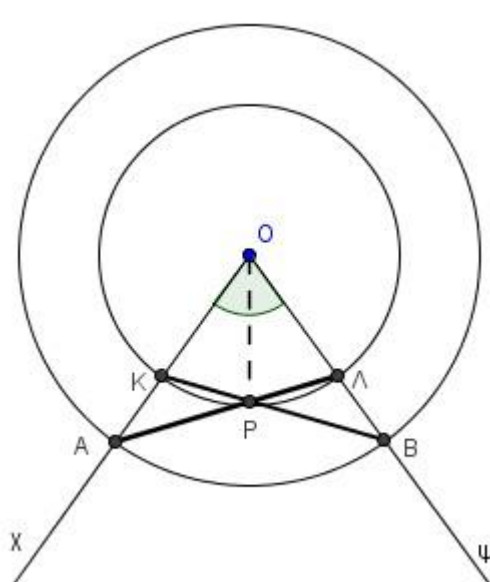
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο  $APB$  είναι ισοσκελές, όπου  $P$  το σημείο τομής των  $AL$  και  $BK$ .

(Μονάδες 8)

γ) Η  $OP$  διχοτομεί την  $\hat{xOy}$ .

(Μονάδες 9)



#### ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε δυο σημεία  $A$  και  $B$  τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία  $(\varepsilon)$ , τέτοια ώστε η ευθεία  $AB$  δεν είναι κάθετη στην  $(\varepsilon)$ . Έστω  $A'$  το συμμετρικό του  $A$  ως προς την ευθεία  $(\varepsilon)$ .

α) Αν η  $A'B$  τέμνει την ευθεία  $(\varepsilon)$  στο σημείο  $O$ , να αποδείξετε ότι:

- i. Η ευθεία  $(\varepsilon)$  διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{AOA'}$ . (Μονάδες 6)
- ii. Οι ημιευθείες  $OA$  και  $OB$  σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία  $(\varepsilon)$  (Μονάδες 6)

β) Αν  $K$  είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία  $(\varepsilon)$ , να αποδείξετε ότι:

- i.  $KA = KA'$  (Μονάδες 6)
- ii.  $KA + KB > AO + OB$  (Μονάδες 7)

#### ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ), και την ευθεία  $\varepsilon$  της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας  $A$ . Η κάθετη στην πλευρά  $AB$  στο  $B$  τέμνει την  $\varepsilon$  στο  $K$  και την ευθεία  $A\Gamma$  στο  $Z$ . Η κάθετη στην πλευρά  $A\Gamma$  στο  $\Gamma$  τέμνει την  $\varepsilon$  στο  $\Lambda$  και την ευθεία  $AB$  στο  $E$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $AZ=AE$  (Μονάδες 8)

ii.  $AK=A\Lambda$  (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η  $A\Theta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , όπου  $\Theta$  το σημείο τομής των  $KZ$  και  $E\Lambda$ . Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

