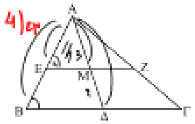
4)



$(ΑΒΓ) = 75\,μ^2$, $\dfrac{ΑΜ}{ΑΔ} = \dfrac{3}{5}$, $ΕΖ \parallel ΒΓ$, $(ΒΕΖΓ) = ;$

ΛΥΣΗ

$(ΒΕΖΓ) = (ΑΒΓ) - (ΑΕΖ)$

$\dfrac{(ΑΕΖ)}{(ΑΒΓ)} = λ^2 = \left(\dfrac{ΑΕ}{ΑΒ}\right)^2$

ΑΕΖ, ΑΒΓ
① $\hat{Α}$ - κοινή
② $\hat{Ε}_1 = \hat{Β}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά)

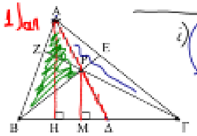
ΑΕΖ ≈ ΑΒΓ, $λ = \dfrac{ΑΕ}{ΑΒ}$

ΑΕΜ ≈ ΑΒΔ ($\hat{Α}$ - κοινή, $\hat{Ε}_1 = \hat{Β}$), Άρα $\dfrac{ΑΕ}{ΑΒ} = \dfrac{ΑΜ}{ΑΔ} = \dfrac{3}{5}$

$\dfrac{(ΑΕΖ)}{75} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{(ΑΕΖ)}{75} = \dfrac{9}{25} \Leftrightarrow (ΑΕΖ) = 27\,μ^2$

Άρα $(ΒΕΖΓ) = 75 - 27 = 48\,μ^2$

1)



i) $\dfrac{(ΒΡΓ)}{(ΑΒΓ)} = \dfrac{ΡΔ}{ΑΔ}$

ΛΥΣΗ ($ΡΜ \perp ΒΓ$, $ΑΗ \perp ΒΓ$)

$\dfrac{(ΒΡΓ)}{(ΑΒΓ)} = \dfrac{ΡΜ}{ΑΗ}$, Αρκεί $\dfrac{ΡΜ}{ΑΗ} = \dfrac{ΡΔ}{ΑΔ}$, αρκεί ΡΜΔ ≈ ΑΗΔ

Συγκρίνω ΡΜΔ, ΑΗΔ
① $\hat{Η} = \hat{Μ} = 90°$
② $\hat{Δ}$ - κοινή

ΡΜΔ ≈ ΑΗΔ, Οπότε $\dfrac{ΡΜ}{ΑΗ} = \dfrac{ΡΔ}{ΑΔ}$

Άρα $\boxed{\dfrac{(ΒΡΓ)}{(ΑΒΓ)} = \dfrac{ΡΔ}{ΑΔ}}$

ii) $\dfrac{ΡΔ}{ΑΔ} + \dfrac{ΡΕ}{ΒΕ} + \dfrac{ΡΖ}{ΓΖ} = 1$

ΛΥΣΗ

$\dfrac{(ΒΡΓ)}{(ΑΒΓ)} = \dfrac{ΡΔ}{ΑΔ}$, όμοια $\dfrac{(ΑΡΓ)}{(ΑΒΓ)} = \dfrac{ΡΕ}{ΒΕ}$, $\dfrac{(ΑΡΒ)}{(ΑΒΓ)} = \dfrac{ΡΖ}{ΓΖ}$

$\dfrac{(ΒΡΓ) + (ΑΡΓ) + (ΑΡΒ)}{(ΑΒΓ)} = \dfrac{ΡΔ}{ΑΔ} + \dfrac{ΡΕ}{ΒΕ} + \dfrac{ΡΖ}{ΓΖ} \Leftrightarrow \dfrac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΓ)} = \dfrac{ΡΔ}{ΑΔ} + \dfrac{ΡΕ}{ΒΕ} + \dfrac{ΡΖ}{ΓΖ} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{ΡΔ}{ΑΔ} + \dfrac{ΡΕ}{ΒΕ} + \dfrac{ΡΖ}{ΓΖ}$ (*)

iii) $\dfrac{ΡΑ}{ΑΔ} + \dfrac{ΡΒ}{ΒΕ} + \dfrac{ΡΓ}{ΓΖ} = 2$

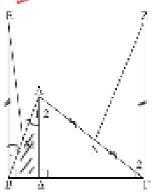
ΛΥΣΗ

$\dfrac{ΡΑ}{ΑΔ} = \dfrac{ΑΔ - ΡΔ}{ΑΔ} = 1 - \dfrac{ΡΔ}{ΑΔ}$, όμοια $\dfrac{ΡΒ}{ΒΕ} = 1 - \dfrac{ΡΕ}{ΒΕ}$, $\dfrac{ΡΓ}{ΓΖ} = 1 - \dfrac{ΡΖ}{ΓΖ}$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{+}$ (βάσει του (*))

$\dfrac{ΡΑ}{ΑΔ} + \dfrac{ΡΒ}{ΒΕ} + \dfrac{ΡΓ}{ΓΖ} = 2$

2)



$ΒΕ \perp ΒΓ$, $ΓΖ \perp ΒΓ$, ΑΔ - ύψ
$ΒΕ = ΓΖ = 2ΑΔ$, Μ, Ν - μέσα
$(ΕΒΜ) + (ΖΓΝ) \stackrel{?}{=} (ΑΒΓ)$

ΛΥΣΗ

$(ΑΒΓ) = (ΑΒΔ) + (ΑΔΓ)$
Αρκεί $(ΑΒΔ) = (ΕΒΜ)$, $(ΑΔΓ) = (ΖΓΝ)$

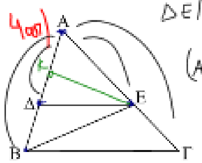
$\hat{Β}_1 = \hat{Α}_1$ (εντός εναλλάξ: $ΒΕ \perp ΒΓ$, $ΑΔ \perp ΒΓ$ } $ΒΕ \parallel ΑΔ$)

$\dfrac{(ΕΒΜ)}{(ΑΒΔ)} = \dfrac{ΒΕ \cdot ΒΜ}{ΑΒ \cdot ΑΔ} = \dfrac{2ΑΔ \cdot ΒΜ}{2ΒΜ \cdot ΑΔ} = 1$, Άρα $(ΕΒΜ) = (ΑΒΔ)$

Όμοια $(ΑΔΓ) = (ΖΓΝ)$

$(ΑΒΓ) = (ΕΒΜ) + (ΖΓΝ)$

4)



$ΔΕ \parallel ΒΓ$, $(ΑΒΕ)^2 = (ΑΔΕ)(ΑΒΓ)$

ΛΥΣΗ

$(ΑΒΕ)^2 = (ΑΔΕ)(ΑΒΓ) \Leftrightarrow \dfrac{(ΑΒΕ)}{(ΑΔΕ)} = \dfrac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΕ)}$

Εκ ίσης του ΑΒΕ, ΑΔΕ

$\dfrac{(ΑΒΕ)}{(ΑΔΕ)} = \dfrac{ΑΒ}{ΑΔ}$, όμοια $\dfrac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΕ)} = \dfrac{ΑΓ}{ΑΕ}$

$\dfrac{ΑΒ}{ΑΔ} = \dfrac{ΑΓ}{ΑΕ}$ (Βάσει του Θ. Θαλή)

Άρα $\dfrac{(ΑΒΕ)}{(ΑΔΕ)} = \dfrac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΕ)}$