

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων AB και ΓΔ ονομάζεται ο θετικός αριθμός λ για τον οποίο ισχύει : $AB = \lambda \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \lambda$.

Μέτρο ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι ο λόγος του προς ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα που θεωρείται ως μονάδα μέτρησης . **Αναλογία** είναι η ισότητα λόγων. Η σχέση $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$ είναι

αναλογία με λόγο λ και όρους τα τμήματα α ,β,γ,δ. Στην πιο πάνω αναλογία τα τμήματα α και γ λέγονται **ανάλογα** των β και δ. Τα α και δ λέγονται **άκροι** όροι ενώ τα β και γ **μέσοι** όροι της αναλογίας.

Ιδιότητες αναλογιών

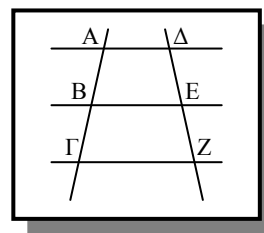
$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} &\Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma, & \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} &\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}, & \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} &\Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha} \\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} &\Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}, & \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} &\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha \pm \beta} = \frac{\gamma}{\gamma \pm \delta} \\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \dots = \frac{\kappa}{\lambda} &= \frac{\alpha + \gamma + \dots + \kappa}{\beta + \delta + \dots + \lambda} \end{aligned}$$

Θεώρημα Θαλή

Αν (τρεις τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες ,ορίζουν σ' αυτές τμήματα ανάλογα .

Δηλαδή με βάση το σχήμα ισχύει η αναλογία :

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$



9ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

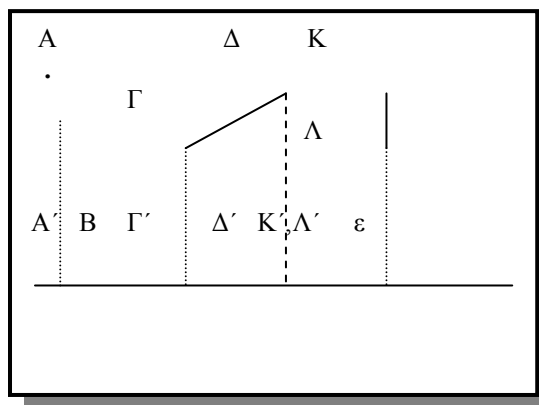
Μετρικές σχέσεις ονομάζουμε τις σχέσεις μεταξύ των μέτρων των στοιχείων τριγώνων είτε αυτά είναι κύρια στοιχεία (πλευρές, γωνίες), είτε είναι δευτερεύοντα (ύψη, διχοτόμοι, διάμεσοι).

Προβολή σημείου σε ευθεία

Δίνεται ευθεία ε και σημείο A που δεν ανήκει σε αυτήν. **Ορθή προβολή** ή απλά **προβολή** του σημείου A στην ε λέγεται το ίχνος A' , της καθέτου που άγεται από το A προς την ε . Αν κάποιο σημείο, όπως το B , ανήκει στην ευθεία ε , η προβολή του B είναι το ίδιο το B .

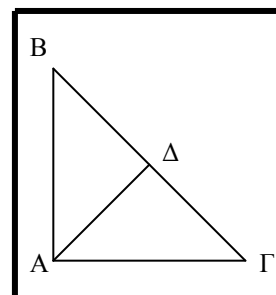
Προβολή ευθύγραμμου τμήματος σε ευθεία

Προβολή ενός τμήματος $\Gamma\Delta$ πάνω στην ευθεία ε λέμε το τμήμα $\Gamma'\Delta'$ που έχει άκρα τις προβολές Γ' και Δ' των άκρων Γ και Δ του τμήματος $\Gamma\Delta$. Αν ο φορέας ενός τμήματος $K\Lambda$ είναι κάθετος στην ε τότε οι προβολές των K και Λ συμπίπτουν. Έτσι η προβολή του $K\Lambda$ είναι ένα σημείο, δηλαδή έχει μέτρο 0.



Πίνακας μετρικών σχέσεων
για ορθογώνια τρίγωνα

$AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$	ή	$\gamma^2 = B\Delta \cdot \alpha$
$AG^2 = \Gamma\Delta \cdot B\Gamma$	ή	$\beta^2 = \Gamma\Delta \cdot \alpha$
$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$	ή	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$
$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$	ή	$u_\alpha^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$
$A\Gamma \cdot AB = B\Gamma \cdot A\Delta$	ή	$\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot u_\alpha$

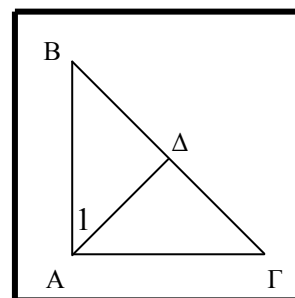


ΔΙΑΤΥΠΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ – ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο, τότε το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του ισούται με το γινόμενο της προβολής της στην υποτείνουσα επί την υποτείνουσα

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A} = 90^\circ$ φέρουμε το ύψος $A\Delta$. Τα τρίγωνα $AB\Delta$, $AB\Gamma$ είναι όμοια, επειδή $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ ως γωνίες με πλευρές κάθετες. Από την ομοιότητα προκύπτει ότι :

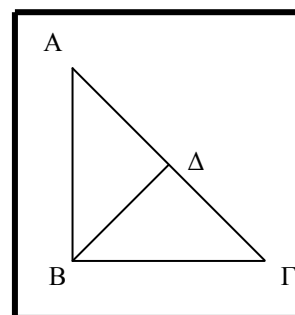
$$\frac{AB}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB}, \text{ δηλαδή } AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma //$$



Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A} = 90^\circ$ φέρουμε το ύψος $A\Delta$ και ισχύουν σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα οι σχέσεις :

$$\begin{aligned} AB^2 &= B\Delta \cdot B\Gamma \text{ και } AG^2 = \Delta\Gamma \cdot B\Gamma \\ \text{και με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε} \\ AB^2 + AG^2 &= B\Delta \cdot B\Gamma + \Delta\Gamma \cdot B\Gamma = \\ &= (B\Delta + \Delta\Gamma) \cdot B\Gamma = B\Gamma^2 // \end{aligned}$$



Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Αν σ' ένα τρίγωνο το τετράγωνο μιας πλευράς ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά αυτή.

Θεωρούμε ορθή γωνία $\hat{\chi}$ $\hat{\psi}$ και επί των πλευρών

$Ο\chi, Ο\psi$ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα
 $ΟΔ=ΑΒ, ΟΕ=ΑΓ$. Τότε από το Πυθαγόρειο

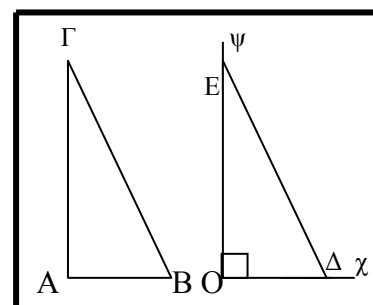
θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΔΕ$

θα έχουμε: $ΔΕ^2 = ΟΔ^2 + ΟΕ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$.

Άρα $ΔΕ=ΒΓ$, δηλαδή τα τρίγωνα $ΑΒΓ, ΟΔΕ$

έχουν τρεις πλευρές ίσες μια προς

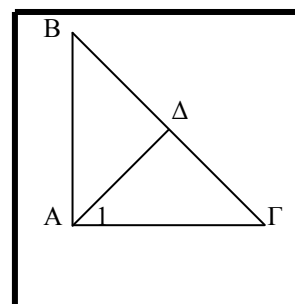
μια, άρα είναι ίσα, άρα $\hat{Α} = \hat{Ο} = 90^\circ$ //



Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα .

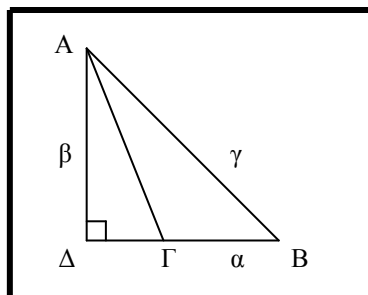
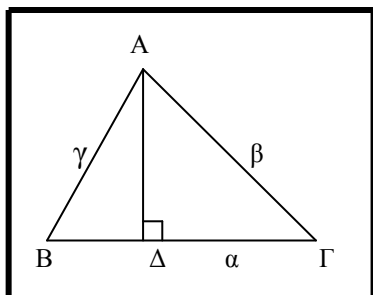
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, με $\hat{Α} = 90^\circ$ φέρουμε το ύψος $ΑΔ$. Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΔΓ$ είναι όμοια γιατί $\hat{Β} = \hat{Α}_1$ ως συμπληρωματικές της γωνίας $\hat{Γ}$.

$$\text{Άρα } \frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{ΔΓ}{ΑΔ} \text{ ή } ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ \quad //$$



ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Το τετράγωνο πλευράς που βρίσκεται απέναντι από οξεία (αμβλεία) γωνία ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών ελαττωμένο (αυξημένο) κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.



$$\hat{\Gamma} < 90^\circ \text{ τότε } \gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha \cdot \Delta\Gamma$$

$$\hat{\Gamma} > 90^\circ \text{ τότε } \gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2 + 2\alpha \cdot \Delta\Gamma$$

Έστω $\hat{\Gamma} < 90^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΔ ισχύει $AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$ (1)

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο AΔΓ ισχύει $A\Delta^2 = A\Gamma^2 - \Delta\Gamma^2$ (2)

Όμως $B\Delta = B\Gamma - \Delta\Gamma$ Άρα $B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 - 2B\Gamma \cdot \Delta\Gamma$ (3)

Λόγω των σχέσεων (2), (3) η (1) γίνεται :

$$AB^2 = A\Gamma^2 - \Delta\Gamma^2 + B\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 - 2B\Gamma \cdot \Delta\Gamma = A\Gamma^2 + B\Gamma^2 - 2B\Gamma \cdot \Delta\Gamma$$

Παρόμοια αν $\hat{\Gamma} > 90^\circ //$

κριτήριο για το είδος γωνίας τριγώνου

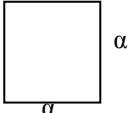
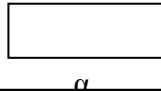
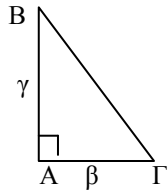
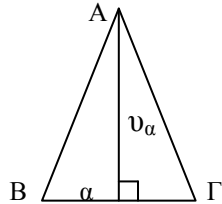
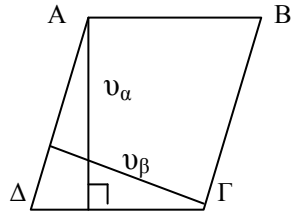
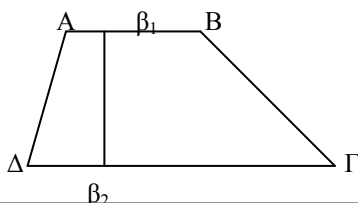
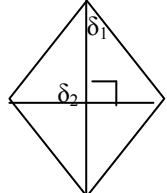
Αν σε ένα τρίγωνο ABΓ οι πλευρές α , β , γ συνδέονται με μια από τις παρακάτω σχέσεις τότε μπορούμε να εξασφαλίσουμε το είδος της αντίστοιχης γωνίας .

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

$$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

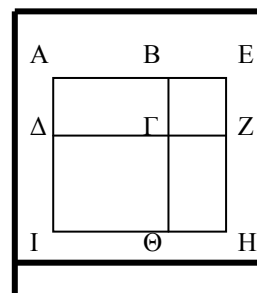
$$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

10ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΜΒΑΔΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ		
Τετράγωνο	$E = \alpha^2$	
Ορθογώνιο	$E = \alpha\beta$	
Ορθογώνιο Τρίγωνο	$E = \frac{1}{2} \beta\gamma$	
Τρίγωνο	$E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \nu_\alpha = \frac{1}{2} \beta \cdot \nu_\beta = \frac{1}{2} \gamma \cdot \nu_\gamma$	
Παραλληλόγραμμο	$E = \alpha \cdot \nu_\alpha = \beta \cdot \nu_\beta$	
Τραπεζίο	$E = \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2) \cdot \nu$	
Ρόμβος	$E = \frac{1}{2} \delta_1 \cdot \delta_2$	

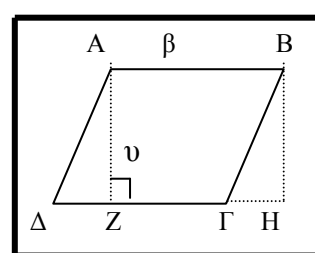
**Το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου
με πλευρές α και β είναι $E = \alpha\beta$**

Το ΑΙΗΕ είναι τετράγωνο και $AE \parallel IH$ και $AI \parallel EH$.
Επίσης $AB\Gamma\Delta = \Gamma\Theta HZ$ επειδή $\Gamma\Delta = \Gamma\Theta = \alpha$, $B\Gamma = \Gamma Z = \beta$
Ισχύει $(AIHE) = (AB\Gamma\Delta) + (B\Gamma ZE) + (\Gamma\Theta HZ) + (\Gamma\Delta I\Theta)$
ή ισοδύναμα $(\alpha + \beta)^2 = 2(AB\Gamma\Delta) + \beta^2 + \alpha^2$
δηλαδή $(AB\Gamma\Delta) = \alpha\beta //$



**Το εμβαδόν παραλληλογράμμου με βάση β
και αντίστοιχο ύψος υ είναι $E = \beta\upsilon$**

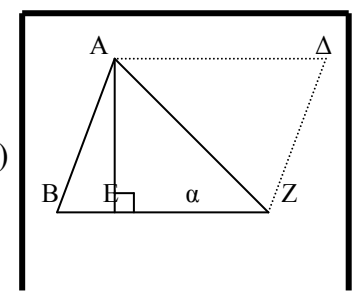
Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta Z$ και $B\Gamma H$ είναι ίσα (γιατί;) άρα
 $(A\Delta Z) = (B\Gamma H)$. Θα έχουμε $(AB\Gamma\Delta) = (ABHZ)$
Όμως $(ABHZ) = \beta\upsilon$ άρα $(AB\Gamma\Delta) = \beta\upsilon. //$



**Αν α η πλευρά ενός τριγώνου και υ το
αντίστοιχο ύψος, τότε το εμβαδόν του**

$$\text{ισούται με } E = \frac{1}{2} \alpha \upsilon$$

Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις παράλληλες
προς τις ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα οι οποίες τέμνονται
στο Δ. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και $AB\Gamma = A\Delta\Gamma$
Επειδή $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Delta\Gamma)$ έχουμε $(AB\Gamma\Delta) = 2(AB\Gamma)$
ή $\alpha\upsilon = 2(AB\Gamma)$ ή $E = \frac{1}{2} \alpha \upsilon //$

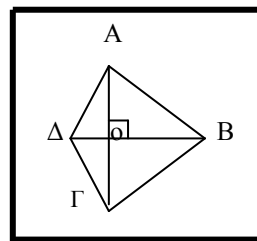


**Το εμβαδόν τετραπλεύρου με διαγώνιες κάθετες
ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.**

Έστω το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα στο σημείο Ο. Στα τρίγωνα ΑΒΓ και

ΑΓΔ ισχύει $(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) =$

$$\frac{ΑΓ \cdot ΒΟ}{2} + \frac{ΑΓ \cdot ΔΟ}{2} = ΑΓ \frac{(ΒΟ + ΔΟ)}{2} = \frac{ΑΓ \cdot ΒΔ}{2} //$$

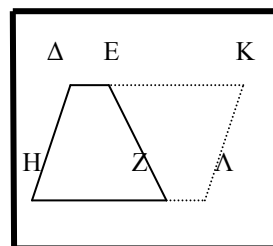


Το εμβαδόν ενός τραπέζιου με βάσεις Β, β και ύψους υ

$$\text{ισούται με } E = (B + \beta) \frac{\upsilon}{2}$$

Έστω ΔΕΖΗ τραπέζιο . Προεκτείνουμε το ΔΕ κατά ΕΚ = ΖΗ και ΗΖ κατά ΖΛ = ΔΕ . $\Delta Ε + ΕΚ = ΗΖ + ΖΛ$ δηλαδή $\Delta Κ = ΗΛ$. Το ΔΚΛΗ είναι παραλληλόγραμμο και τα τραπέζια ΔΕΖΗ και ΕΚΛΖ είναι ίσα . Άρα $(\Delta ΚΛΗ) = (\Delta ΕΖΗ) + (ΕΚΛΖ) = 2(\Delta ΕΖΗ)$ Αλλά $(\Delta ΕΖΗ) = (B + \beta)υ$ και επομένως

$$(\Delta ΕΖΗ) = (B + \beta) \frac{\upsilon}{2} //$$



ΑΛΛΟΙ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Το εμβαδό ενός τριγώνου ισούται με $E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$,

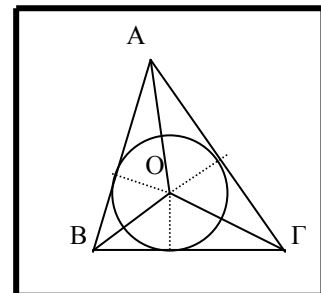
όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου και α, β, γ οι πλευρές αυτού.

Προκύπτει άμεσα από τον τύπο $E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \nu_\alpha$ και τον γνωστό (από το γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα) τύπο του ύψους $\nu_\alpha = \frac{2}{a} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$ //

**Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με $E = \tau \rho$,
όπου τ είναι η ημιπερίμετρος και ρ η ακτίνα
του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου**

Ισχύει από το σχήμα:

$$\begin{aligned} (AB\Gamma) &= (AOB) + (BO\Gamma) + (\Gamma O A) = \\ &= AB \frac{\rho}{2} + B\Gamma \frac{\rho}{2} + A\Gamma \frac{\rho}{2} = \\ &= (AB + B\Gamma + \Gamma A) \cdot \frac{\rho}{2} = \tau \rho. // \end{aligned}$$



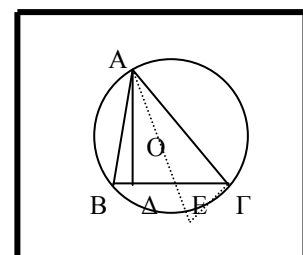
Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$

**όπου α, β, γ οι πλευρές του και R η ακτίνα
του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου**

Φέρνουμε την διάμετρο ΑΕ του κύκλου, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΔ είναι όμοια γιατί $\angle B \hat{=} \angle A = \angle \Gamma \hat{=} \angle E = 90^\circ$

Και $\hat{B} = \hat{E}$ επειδή βαίνουν στο τόξο ΑΓ

$$\text{Άρα } \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{AB}{AE} \Leftrightarrow \frac{\nu}{\beta} = \frac{\gamma}{2R} \Leftrightarrow \nu = \frac{\beta\gamma}{2R} \text{ άρα } E = \frac{1}{2} a \frac{\beta\gamma}{2R} //$$



Για το εμβαδόν E ενός τριγώνου ισχύουν οι σχέσεις

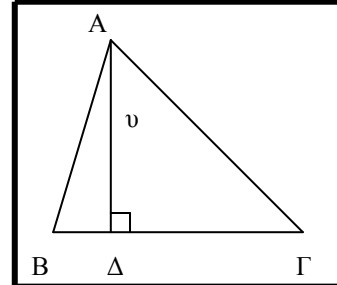
$$E = \frac{1}{2} \alpha \beta \eta \mu \Gamma = \frac{1}{2} \alpha \gamma \eta \mu B = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta \mu A$$

Στο τρίγωνο ABΓ φέρνουμε το ύψος AΔ = υ

$$\text{Ισχύει } \eta \mu \Gamma = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{\upsilon}{\beta} \quad \text{άρα } \upsilon = \beta \eta \mu \Gamma .$$

$$\text{Επειδή } E = \frac{\alpha \upsilon}{2} \text{ προκύπτει ότι } E = \frac{1}{2} \alpha \beta \eta \mu \Gamma$$

Ανάλογα αποδεικνύονται και οι άλλες σχέσεις. //



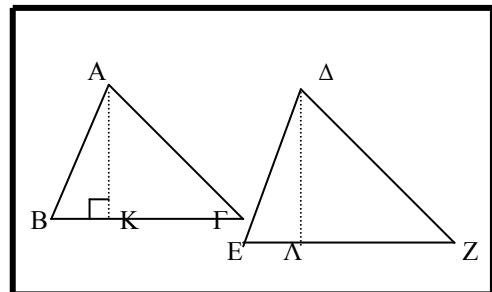
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΜΒΑΔΩΝ

**Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ
τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με λ²**

Τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι όμοια

$$\text{Έχουμε λοιπόν } \frac{B\Gamma}{E\text{Z}} = \frac{A\text{K}}{\Delta\Lambda} = \lambda \text{ Συνεπώς}$$

$$\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \frac{\frac{1}{2} B\Gamma A\text{K}}{\frac{1}{2} E\text{Z} \Delta\Lambda} = \frac{B\Gamma}{E\text{Z}} \frac{A\text{K}}{\Delta\Lambda} = \lambda^2 . //$$



**Αν δυο τετράπλευρα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ
τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με λ² .**

Φέρνουμε τις διαγώνιες ΑΓ, ΕΗ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ

και ΕΖΗ είναι όμοια γιατί $\frac{AB}{EZ} = \frac{BG}{ZH} = \lambda$ και

$\hat{B} = \hat{Z}$. Επειδή $\frac{AG}{EH} = \frac{BG}{ZH} = \lambda$ και $\hat{A} = \hat{E}$ τα

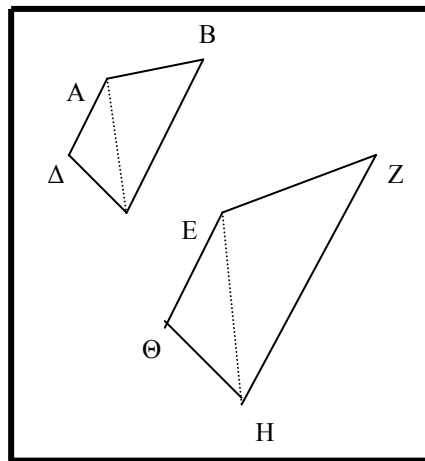
τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΖΗ είναι όμοια με λόγο λ

Άρα $(AB\Gamma) = \lambda^2 (EZH)$ και

$(A\Delta\Gamma) = \lambda^2 (E\Theta H)$

δηλαδή $(AB\Gamma) + (A\Delta\Gamma) = \lambda^2 (EZH + E\Theta H)$

τελικά $(AB\Gamma\Delta) = \lambda^2 (EZH\Theta)//$



**Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική
με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών
τους ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.**

Τότε και στις δυο περιπτώσεις θα ισχύει $\eta\mu A = \eta\mu A'$, οπότε από τις ισότητες

$E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \eta\mu A$ και $E' = \frac{1}{2} \beta' \cdot \gamma' \eta\mu A'$ με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι $\frac{E}{E'} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}$, που

είναι το ζητούμενο.//

11ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Η γωνία ενός κανονικού ν-γωνου δίνεται από τη σχέση

$$\hat{\phi}_\nu = 180 - \frac{360}{\nu}$$

απόδειξη

Το άθροισμα των γωνιών ενός ν-γωνου είναι $2\nu-4$ ορθές

Κάθε γωνία λοιπόν είναι ίση με $1/\nu(2\nu-4) = (2 - \frac{4}{\nu})$ ορθές .

$$\text{Άρα } \hat{\phi}_\nu = (2 - \frac{4}{\nu}) 90 = 180 - \frac{360}{\nu} //$$

Δυο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια .

απόδειξη

Αν $\lambda_\nu, \lambda'_\nu$ είναι οι πλευρές και $\hat{\phi}_\nu, \hat{\phi}'_\nu$ οι γωνίες των δύο

πολυγώνων τότε $\hat{\phi}_\nu = 180 - \frac{360}{\nu} = \hat{\phi}'_\nu$ και ο λόγος δύο πλευρών

είναι ίσος με το σταθερό λόγο $\frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu}$ Επομένως έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες και τις

πλευρές τους ανάλογες άρα είναι όμοια .//

Σε κάθε κανονικό ν-γωνο εγγεγραμμένο
σε κύκλο ακτίνας R ισχύουν :

$$(\alpha) \left(\frac{\lambda_\nu}{2} \right)^2 + \alpha_\nu^2 = R^2 \quad (\beta) P_\nu = \nu \lambda_\nu \quad (\gamma) E_\nu = \frac{1}{2} P_\nu \alpha_\nu$$

απόδειξη

(α) Από το ορθογώνιο ΟΓΚ έχουμε $\Gamma K^2 + OK^2 = OG^2$

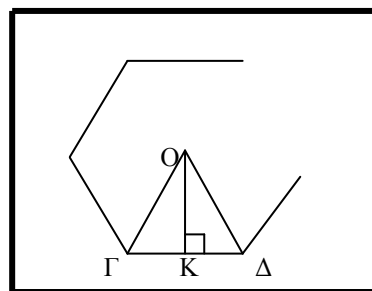
$$\text{δηλαδή } \left(\frac{\lambda_\nu}{2} \right)^2 + \alpha_\nu^2 = R^2$$

(β) Η περίμετρος του κανονικού ν-γώνου είναι

$$P_\nu = \lambda_\nu + \dots + \lambda_\nu = \nu \lambda_\nu$$

(γ) Το κανονικό ν-γωνο χωρίζεται σε ν ίσα ισοσκελή

$$\text{τρίγωνα Άρα } E_\nu = \nu (OG\Delta) = \nu \left(\frac{1}{2} \lambda_\nu \alpha_\nu \right) = \frac{1}{2} \nu \lambda_\nu \alpha_\nu = \frac{1}{2} P_\nu \alpha_\nu //$$



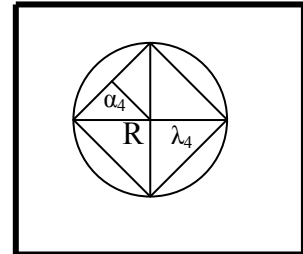
Εγγραφή κανονικών πολυγώνων σε κύκλο

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

Για να **εγγράψουμε** ένα τετράγωνο σε κύκλο κέντρου O ακτίνας R φέρνουμε δύο **κάθετες διαμέτρους** $ΑΓ$ και $ΒΔ$. Το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι τότε ένα τετράγωνο.

Η πλευρά και το απόστημα του δίνονται από τους τύπους

$$\lambda_4 = R\sqrt{2} \quad \text{και} \quad \alpha_4 = R \frac{\sqrt{2}}{2}$$



ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΕΞΑΓΩΝΟ

Έστω $ΑΒΓΔΕΖ$ κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο

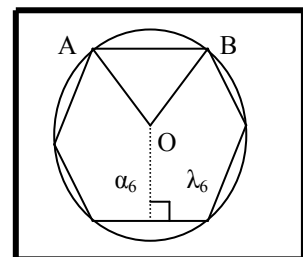
στον κύκλο (O, R) . Τότε η $\hat{\omega}_v = \frac{360}{6} = 60^\circ$. Άρα

το τρίγωνο $ΑΟΒ$ είναι ισόπλευρο επομένως $\lambda_6 = R$

Οπότε ορίζουμε στον κύκλο (O, R) έξι διαδοχικά τόξα κάθε ένα από τα οποία έχει χορδή ίση με R .

Η πλευρά και το απόστημα του δίνονται από τους τύπους

$$\lambda_6 = R \quad \text{και} \quad \alpha_6 = R \frac{\sqrt{3}}{2}$$



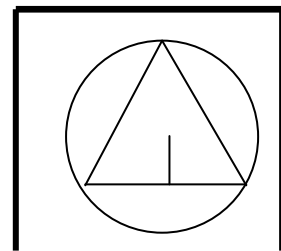
ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

Χωρίζουμε πρώτα τον κύκλο σε έξι ίσα τόξα και

έπειτα ενώνουμε τις κορυφές ανά δύο.

Η πλευρά και το απόστημα του δίνονται από τους τύπους

$$\lambda_3 = R\sqrt{3} \quad \text{και} \quad \alpha_3 = \frac{R}{2}$$



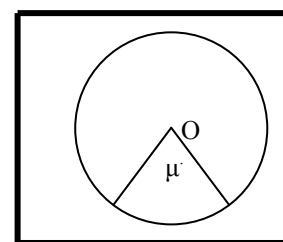
Μήκος κύκλου και τόξων

Το **μήκος** ενός κύκλου ακτίνας R είναι $L = 2\pi R$

Το μήκος ενός τόξου που έχει μέτρο μ° είναι $S = \pi R \frac{\mu}{180}$

Αν α είναι το μέτρο του τόξου σε ακτίνια και μ το μέτρο του σε μοίρες τότε ισχύει

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$



A

B

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου – τομέα – τμήματος

Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας R είναι $E = \pi R^2$

Το εμβαδόν κυκλικού τομέα με τόξο μ° ενός κυκλικού δίσκου

(O , R) είναι $E_\tau = \pi R^2 \frac{\mu}{360}$

Όταν το τόξο του κυκλικού τομέα έχει μέτρο a ακτίνια τότε

$$E_\tau = \frac{1}{2} a R^2$$

Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος APB στο διπλανό σχήμα υπολογίζεται αν από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα OAPBO αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου OAB .

