Γεωμετρικός μέσος και ... τα επόμενα βήματα

Φύλλο διερευνητικών δραστηριοτήτων

Ονοματεπώνυμο: . . . . . **Τμήμα:** _____

Ένα αυτοκίνητο ταξιδεύει από την πόλη Α στην πόλη Β με σταθερή ταχύτητα $60\,\mathrm{km/h}$ και επιστρέφει από την ίδια διαδρομή με σταθερή ταχύτητα $120\,\mathrm{km/h}$.

Έστω τώρα ότι η απόσταση κάθε διαδρομής είναι d και οι δύο ταχύτητες είναι $v_1, v_2 > 0$. Να βρείτε τη μέση ταχύτητα για το ταξίδι.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Τρεις μέσοι και μια απροσδόκητη σχέση

Για δύο θετικούς αριθμούς a, b ορίζουμε τον αριθμητικό, τον γεωμετρικό και τον αρμονικό μέσο αντίστοιχα:

$$A = \frac{a+b}{2}, \qquad G = \sqrt{ab}, \qquad H = \frac{2ab}{a+b}.$$

α) Υπολογίστε τους τρεις μέσους των αριθμών 4 και 16.

$A =$ _____ $G =$ _____ $H =$ _____

β) Υπολογίστε το γινόμενο $A \cdot H$. Τι παρατηρείτε;

_____

γ) Γνωρίζουμε ότι $G \leq A$. Χρησιμοποιήστε τη σχέση του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι $H \leq G$. Πότε ισχύουν οι ισότητες;

_____

Συμπέρασμα: Για δύο θετικούς αριθμούς ισχύει _____.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Ανακαλύπτοντας την ακολουθία Fibonacci

Μια ακολουθία αρχίζει με τους αριθμούς $1, 1$. Κάθε επόμενος όρος προκύπτει προσθέτοντας τους δύο προηγούμενους.

α) Συμπληρώστε τους όρους που λείπουν:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ \square,\ \square,\ 13,\ \square,\ 34,\ \square,\ \ldots$$

β) Αν συμβολίσουμε τους όρους με $F_1, F_2, \ldots$, συμπληρώστε τη σχέση:

$$F_{n+2} = _____.$$

γ) Συμπληρώστε τον πίνακα (με τέσσερα δεκαδικά ψηφία):

Λόγος	$3/2$	$5/3$	$8/5$	$13/8$	$21/13$	$34/21$
Τιμή						

δ) Προς ποιον αριθμό φαίνεται να πλησιάζουν οι λόγοι; Είναι η προσέγγιση πάντοτε από την ίδια πλευρά;

Ο θετικός αριθμός $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *ονομάζεται χρυσός αριθμός.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Οι αριθμοί Fibonacci και ο γεωμετρικός μέσος

Για τρεις θετικούς αριθμούς a, b, c, ο μεσαίος b είναι ο γεωμετρικός μέσος των a, c ακριβώς όταν $b^2 = ac$.

α) Εξετάστε αν ο μεσαίος αριθμός είναι *ακριβώς* ο γεωμετρικός μέσος των άλλων δύο σε καθεμιά από τις τριάδες Fibonacci:

$$(3, 5, 8), \quad (5, 8, 13), \quad (8, 13, 21), \quad (13, 21, 34).$$

β) Υπολογίστε και συγκρίνετε:

$$\sqrt{5 \cdot 13} \text{ και } 8, \qquad \sqrt{8 \cdot 21} \text{ και } 13, \qquad \sqrt{13 \cdot 34} \text{ και } 21.$$

Ποιος από τους μεσαίους όρους πλησιάζει περισσότερο τον αντίστοιχο γεωμετρικό μέσο;

γ) Συνδυάστε την παρατήρησή σας με τους λόγους της προηγούμενης δραστηριότητας: Γιατί οι διαδοχικοί όροι Fibonacci συμπεριφέρονται *περίπου* σαν γεωμετρική πρόοδος, παρότι ορίζονται με πρόσθεση;

Για περαιτέρω σκέψη: *Ταυτότητα Cassini*: $F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$. Μπορείτε να την επαληθεύσετε σε δύο ακόμη τριάδες;