

ΓΕ.Λ. Επανομής 2025 - 2026

Άλγεβρα Β λυκείου

Συναρτήσεις

1 **Συνάρτηση**, f , με πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbb{R}$, λέγεται μια διαδικασία κατά την οποία κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ακριβώς έναν πραγματικό αριθμό $y \in \mathbb{R}$. Το y λέγεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$. Γράφουμε

$$f : A \rightarrow \mathbb{R} : y = f(x)$$

Η αλγεβρική σχέση μεταξύ των μεταβλητών x, y λυμένη ως προς y λέγεται **τύπος** της f .

2 Όταν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης δε δίνεται, τότε ακολουθούμε τους παρακάτω κανόνες για να το βρούμε:

α. Όλοι οι παρονομαστές πρέπει να είναι διάφοροι του 0.

β. Όλες οι υπόριζες ποσότητες πρέπει να είναι μη αρνητικές.

γ. Αν δεν υπάρχουν περιορισμοί τότε πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$.

Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης το γράφουμε πάντα ως διάστημα ή ως ένωση διαστημάτων.

3 Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. **Γραφική παράσταση** της f λέγεται το σύνολο

$$C_f = \{(x, f(x)) | x \in A\}$$

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι γενικά μία καμπύλη του επιπέδου. Ένα σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης. Δηλαδή

$$M(x, y) \in C_f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in D_f \\ y = f(x) \end{array} \right\}$$

4 Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Τα σημεία $x \in A$ για τα οποία ισχύει $f(x) = 0$ λέγονται **ρίζες** της f . Επομένως, για να βρούμε τις ρίζες της f , πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$. Δεκτές είναι μόνο οι λύσεις που βρίσκονται εντός του D_f . Επίσης τα σημεία $(x, 0)$ της C_f είναι τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τον άξονα x' .

5 Έστω f μια συνάρτηση και Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της. Η f λέγεται:

- **Γνησίως αύξουσα** στο Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Γνησίως φθίνουσα** στο Δ αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέγεται **γνησίως μονότονη** στο Δ .

Ασκήσεις

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(i) f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4x + 3} \quad (ii) g(x) = \sqrt{3x - 6} \quad (iii) h(x) = 2x - 7$$

$$(iv) f(x) = \frac{1}{3 - x} \quad (v) g(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad (vi) h(x) = \frac{2x}{x^2 - 4} - \sqrt{x - 1}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να το γράψετε ως ένωση διαστημάτων.

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .

γ. Να εξετάσετε αν ο αριθμός -1 είναι τιμή της f .

δ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της.

3. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$(i) f(x) = -3x + 7 \quad (ii) g(x) = 9x + 1 \quad (iii) h(x) = x^3 + 2x$$

$$(iv) f(x) = \frac{2}{x} \quad (v) g(x) = \sqrt{1 - 3x} \quad (vi) h(x) = 2 - \frac{2}{1 - 3x}$$

Για κάθε μια από τις συναρτήσεις αυτές να κάνετε τον πίνακα μονοτονίας.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$.

α. Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

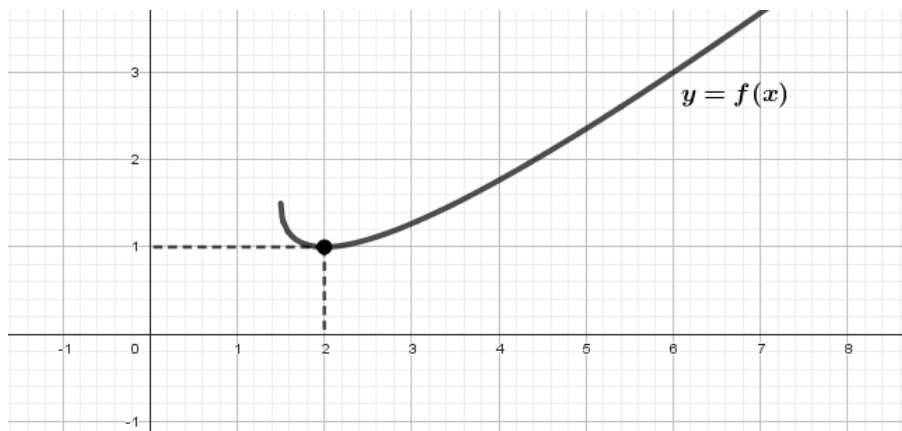
β. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{x} < \sqrt{x}$.

5. (T.Θ. 15437) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{2x - 3}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Από το σχήμα που δίνεται παρακάτω να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης.

γ. Να βρείτε τη μονοτονία της f και να φτιάξετε τον πίνακα μονοτονίας της.



δ. Σωστό ή λάθος; Η f είναι γνησίως μονότονη.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x$. Να αποδείξετε ότι

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

7. Αν k είναι ένας περιττός φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^k$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x-1} - \frac{8}{x^3}$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την εξίσωση $2\sqrt{x-1} = \frac{x^3 + 8}{x^3}$.

Ακρότατα συνάρτησης

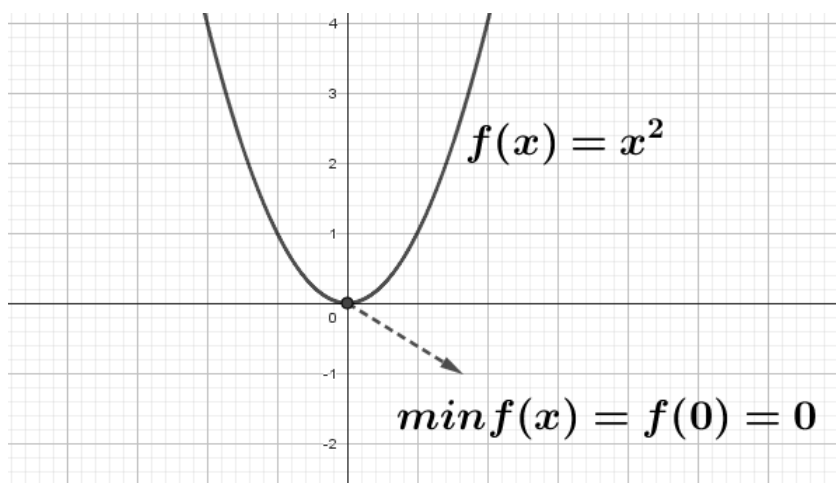
Ορισμός. (1) Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Η f παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $x_0 \in A$ αν ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$. Η τιμή $f(x_0)$ λέγεται ελάχιστο της της f και συμβολίζεται με $\min f(x)$.

(2) Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Η f παρουσιάζει **μέγιστο** στο $x_0 \in A$ αν ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$. Η τιμή $f(x_0)$ λέγεται μέγιστο της f και συμβολίζεται με $\max f(x)$.

ΠΑΡΑΒΟΛΕΣ

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2$. Από τις ιδιότητες της διάταξης γνωρίζουμε ότι ισχύει $x^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως ισχύει $f(x) \geq 0$ και επίσης είναι $f(0) = 0$, άρα $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ και $\min f(x) = f(0) = 0$.

Τα συμπεράσματα αυτά φαίνονται και στη γραφική παράσταση της f που είναι μια παραβολή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.



Το ελάχιστο είναι προφανώς το χαμηλότερο σημείο της γραφικής παράστασης. Επίσης παρουσιάζεται όταν αριστερά του x_0 η f είναι γνησίως φθίνουσα και δεξιά του x_0 γνησίως αύξουσα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f			

2. Μπορείτε τώρα να κάνετε την αντίστοιχη μελέτη για τη συνάρτηση $f(x) = -x^2$. Δείξτε ότι $\max f(x) = f(0) = 0$, κάντε τη γραφική της παράσταση και τον πίνακα μονοτονίας της.

Μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω για την παραβολή $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$. Αρχικά

γράφουμε την f στη μορφή

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}$$

όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα του τριωνύμου. Επομένως, το αν η συνάρτηση θα έχει μέγιστο ή ελάχιστο εξαρτάται από το πρόσημο του α . Έχουμε,

- Αν $\alpha > 0$ τότε

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 &\geq 0 \stackrel{\alpha > 0}{\Rightarrow} \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha} \geq -\frac{\Delta}{4\alpha} \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) &\geq -\frac{\Delta}{4\alpha} \quad (1) \end{aligned}$$

Η (1) δε μας εξασφαλίζει ακόμα ότι ο αριθμός $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ είναι το ελάχιστο της f . Πρέπει να βρούμε και για ποια τιμή x_0 ισχύει $f(x_0) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x_0) &= -\frac{\Delta}{4\alpha} \Leftrightarrow \alpha \left(x_0 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{\Delta}{4\alpha} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha \left(x_0 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 &= 0 \Leftrightarrow x_0 + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} \end{aligned}$$

Επομένως, λόγω της (1), έχουμε

$$f(x) \geq f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha} \quad (2)$$

και τώρα ξέρουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ και $\min f(x) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$. Το σημείο

$$K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$$

λέγεται **κορυφή** της παραβολής.

- Αν $\alpha < 0$ αποδείξτε ότι το σημείο K είναι το μέγιστο της συνάρτησης.

Άσκηση. Βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων

$$(i) f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \quad (ii) g(x) = -3x^2 + 4x - 5$$

Εφαρμογή. Να αποδειχτεί ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή περίμετρο 100, το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν, το οποίο να βρεθεί.

Λύση. Στην τάξη...

Συμμετρικές συνάρτησης

Ορισμός. Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ λέγεται συμμετρικό ως προς το 0 αν για κάθε $x \in A$ ισχύει και $-x \in A$.

Για παράδειγμα τα σύνολα

$$A_1 = (-4, 4) \quad A_2 = (-10, -7) \cup (7, 10)$$

είναι συμμετρικά ως προς το 0.

Ορισμός. 1) Μια συνάρτηση f λέγεται **άρτια**, αν το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς το 0 και ισχύει $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$.

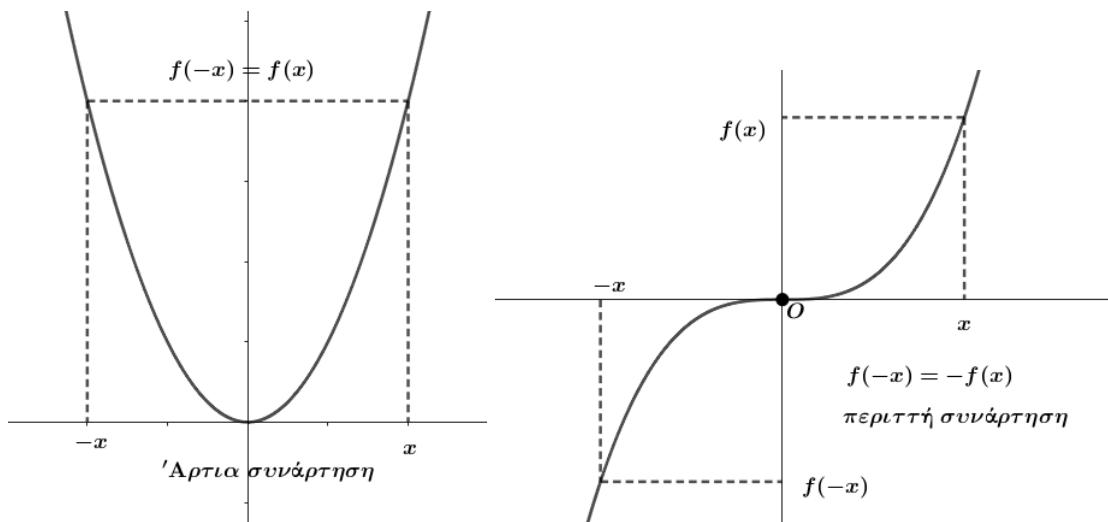
2) Μια συνάρτηση f λέγεται **περιττή**, αν το πεδίο ορισμού της είναι συμμετρικό ως προς το 0 και ισχύει $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$.

Παραδείγματα. 1. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ είναι άρτια, διότι το $D_f = \mathbb{R}$ είναι συμμετρικό ως προς το 0 και επίσης ισχύει $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$ είναι περιττή, διότι το $D_f = \mathbb{R}$ είναι συμμετρικό ως προς το 0 και επίσης ισχύει $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 1. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι άρτια και η συνάρτηση $g(x) = x^3 - x$ είναι περιττή.

Σχόλιο. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον y/y , ενώ μιας περιττής συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων, όπως δείχνουν τα παρακάτω σχήματα.



Ερώτηση. Μπορεί μια άρτια συνάρτηση να είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της ; Δικαιολογήστε.

Σχόλιο. Μια συνάρτηση δεν είναι υποχρεωτικά άρτια ή περιττή. Π.χ. η $f(x) = x^2 + x$ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή. Μπορούμε όμως να αποδείξουμε ότι αν το πεδίο ορισμού μιας

συνάρτησης f είναι συμμετρικό ως προς το 0, τότε η f μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης. Πράγματι έχουμε

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{άρτια}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{περιττή}}$$

Άσκηση 2. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$ να λύσετε την εξίσωση

$$f(x-3) + 2 = 3x - f(3-x)$$

Άσκηση 3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + 3}{x}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

Άσκηση 4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$. **α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **β.** Να δείξετε ότι είναι άρτια. **γ.** Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$.

Μονοτονία - πρόσημο - εξισώσεις - ανισώσεις

Χρησιμοποιώντας τη μονοτονία μιας συνάρτησης, μπορούμε (υπό συνθήκες) να βρούμε τις ρίζες και το πρόσημό της, καθώς και να λύσουμε ανισώσεις ή να αποδείξουμε ανισότητες. Σχετικά, θα αποδείξουμε βασικές προτάσεις και θα δούμε πως δουλεύουν σε εφαρμογές.

Πρόταση 1. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε έχει το πολύ μια ρίζα σ' αυτό.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ . Αν $x_0 \in \Delta$ με $f(x_0) = 0$ τότε για $x \neq x_0$ θα είναι $x > x_0$ ή $x < x_0$ οπότε $f(x) > f(x_0) = 0$ ή $f(x) < f(x_0) = 0$. Σε κάθε περίπτωση είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq x_0$. Δηλαδή αν η f έχει μια ρίζα, τότε αυτή είναι μοναδική.

Εφαρμογή 1. Να λυθεί η εξίσωση $x^5 + 2x - 3 = 0$.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x - 3$. Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$ δηλαδή το $x_0 = 1$ είναι λύση της εξίσωσης. Επίσης θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έστω $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1^5 < x_2^5 \\ 2x_1 < 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^5 < x_2^5 \\ 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3 \end{cases} \xrightarrow{(+)} f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η λύση $x_0 = 1$ είναι μοναδική.

Πρόταση 2. α. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει η ισοδυναμία

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

β. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει η ισοδυναμία

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Απόδειξη. Η κατεύθυνση $(\Rightarrow)$ είναι προφανής από τους ορισμούς. Θα αποδείξουμε την $(\Leftarrow)$ για το (α). Έστω $f(x_1) < f(x_2)$. Αν ήταν $x_1 \geq x_2$ λόγω μονοτονίας θα ήταν και $f(x_1) \geq f(x_2)$ άτοπο. Άρα $x_1 < x_2$.

Εφαρμογή 2. Να λυθεί η ανίσωση $\ln x \leq 1 - x$.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1, x > 0$. Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\ln x \leq 1 - x \Leftrightarrow \ln x + x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0 \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$ οπότε η (1) γίνεται

$$f(x) \leq f(1)$$

Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα (άσκηση) και άρα

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow x \leq 1 \Leftrightarrow x \in (0, 1]$$

Θέματα

1 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 3)$.

α. Να δείξετε ότι $\lambda = 2$.

β. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

δ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

ε. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 + f(x) - x^3$ παρουσιάζει ελάχιστο. Ποιά είναι η θέση και η τιμή του;

στ. Να λύσετε την ανίσωση $|x|^3 - x^3 \leq 2(x - |x|)$.

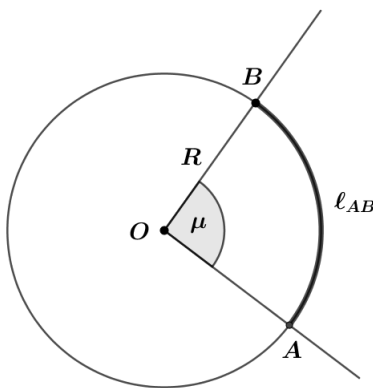
Ακτίνα (rads)

Ο Αρχιμήδης, πρώτος, απέδειξε ότι σε κάθε κύκλο ο λόγος του μήκους προς τη διάμετρο είναι σταθερός και ίσος με $\pi = 3,14159....$ Επομένως, αν L είναι το μήκος του κύκλου και $\delta = 2R$ η διάμετρός του, έχουμε

$$\frac{L}{2\delta} = \pi \Rightarrow L = \pi\delta \Rightarrow \mathbf{L = 2\pi R}$$

Επειδή η ακτίνα R του κύκλου είναι γνωστή και επειδή μπορούμε να γνωρίζουμε το π με όση ακρίβεια θέλουμε, παραπάνω τύπος δίνει το μήκος του κύκλου $C(O, R)$ με όση ακρίβεια επιθυμούμε¹.

Μήκος τόξου. Ας υποθέσουμε τώρα ότι σε κύκλο $C(O, R)$ έχουμε μια επίκεντρη γωνία μ° , η οποία ορίζει επί του κύκλου το αντίστοιχο τόξο $\widehat{AB}$. Γνωρίζοντας ότι όλος ο κύκλος είναι 360 μοίρες, εφαρμόζουμε απλή μέθοδο των τριών για να βρούμε το μήκος ℓ του $\widehat{AB}$.



Έχουμε:

$$360^\circ \rightarrow L = 2\pi R$$

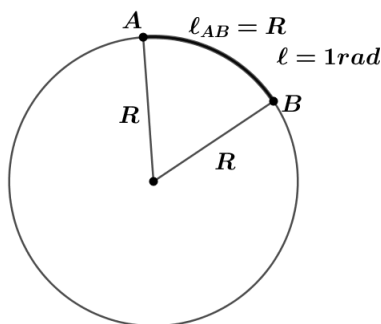
$$\mu^\circ \rightarrow \ell$$

επομένως θα είναι

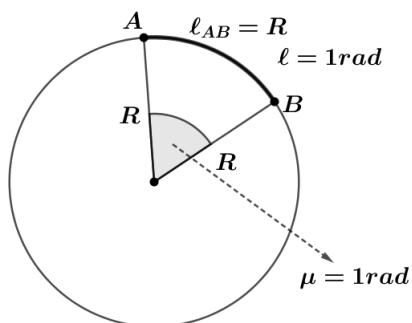
$$360\ell = 2\pi R\mu \Rightarrow \ell = \frac{\pi R\mu}{180}$$

¹Όχι όμως με απόλυτη ακρίβεια. Ο αριθμός π είναι άρρητος, δηλαδή έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν επαναλαμβάνονται. Επίσης, είναι και υπερβατικός, δηλαδή δεν υπάρχει πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές, της οποίας το π είναι λύση. Αυτό οδήγησε τον Lindemann το 1856 να συμπεράνει ότι ο τετραγωνισμός του κύκλου με κανόνα και διαβήτη είναι αδύνατος.

Ορισμός. Ένα ακτίνιο (rad), είναι ένα τόξο του κύκλου με μήκος ίσο με την ακτίνα του.



Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε το rad ως μονάδα μέτρησης και της επίκεντρης γωνίας που βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου.



Τώρα ένας κύκλος έχει, όπως είδαμε, μήκος $L = 2\pi R$ και επειδή $R = 1\text{rad}$ από τον ορισμού του ακτινίου, θα είναι

$$L = 2\pi \text{ (rad)}$$

Επομένως σε 360 μοίρες που είναι όλος ο κύκλος αντιστοιχούν 2π ακτίνια, και αν έχουμε (επίκεντρη) γωνία μ μοιρών μπορούμε πάλι να εφαμόσουμε απλή μέθοδο των τριών για να βρούμε σε πόσα ακτίνια αντιστοιχεί. Έχουμε

$$360^\circ \rightarrow L = 2\pi \text{ (rad)}$$

$$\mu^\circ \rightarrow a \text{ (rad)}$$

άρα θα είναι

$$360a = 2\pi\mu \Rightarrow \frac{a}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

Με τον τελευταίο τύπο, μπορούμε να μετατρέπουμε μοίρες σε rad και αντίστροφα. Για παράδειγμα έχουμε

$$\bullet \mu = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \bullet \mu = 30 \Rightarrow \alpha = \frac{30\pi}{180} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \bullet \mu = 45 \Rightarrow \alpha = \frac{45\pi}{180} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Έτσι μπορούμε να μετατρέψουμε όλες τις βασικές γωνίες , από μοίρες σε ακτίνια, σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα

μοίρες	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών. Στον παρακάτω πίνακα είναι συγκεντρωμένοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των βασικών γωνιών. Θα φανούν πολύ χρήσιμοι στην επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων και σε άλλα θέματα.

μοίρες	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
συν	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
εφ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0
σφ	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-