Άσκηση εκτός βιβλίου

Να λυθεί η ανίσωση $8^x - 14\cdot 4^x + 56\cdot 2^x - 64 \geq 0$.

Λύνουμε πρώτα την εξίσωση $8^x - 14\cdot 4^x + 56\cdot 2^x - 64 = 0$.

Θέτουμε $2^x = \omega$. Τότε $4^x = 2^{2x} = \omega^2$ και $8^x = 2^{3x} = \omega^3$.

Η εξίσωση γίνεται

$$\omega^3 - 14\omega^2 + 56\omega - 64 = 0$$

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner

1	−14	56	−64	2
	2	−24	64	
1	−12	32	0	

$(\omega-2)(\omega^2-12\omega+32)=0 \Leftrightarrow \omega-2=0$ ή $\omega^2-12\omega+32=0$

$\Leftrightarrow \omega=2$ ή $\omega=4$ ή $\omega=8$.

$2^x = 2$ ή $2^x = 4$ ή $2^x = 8$

$x=1$ ή $x=2$ ή $x=3$

Η ανίσωση $8^x - 14\cdot 4^x + 56\cdot 2^x - 64 \geq 0$ γίνεται ισοδύναμα

$\omega^3 - 14\omega^2 + 56\omega - 64 \geq 0$

$(\omega-2)(\omega^2-12\omega+32) \geq 0$

ω	$-\infty$	0	2		4		8		$+\infty$
$\omega-2$	−		0	+		+		+	
$\omega^2-12\omega+32$	+			+	0	−	0	+	
$\omega^3-14\omega^2+56\omega-64$	−		0	+	0	−	0	+	

$\omega \in [2,4] \cup [8,+\infty) \Leftrightarrow$

$2 \leq \omega \leq 4$ ή $\omega \geq 8 \Leftrightarrow$

$2 \leq 2^x \leq 4$ ή $2^x \geq 8 \Leftrightarrow$

$2^1 \leq 2^x \leq 2^2$ ή $2^x \geq 2^3 \Leftrightarrow$

$1 \leq x \leq 2$ ή $x \geq 3 \Leftrightarrow$

$x \in [1,2] \cup [3,+\infty)$

Η συνάρτηση $y=2^x$ είναι γνησίως αύξουσα, αφού $2>1$.