

$$i) \begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ 3^y + 16 \cdot 2^{-x} = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ 2^x \cdot 3^y + 16 \cdot 2^{-x} \cdot 2^x = 11 \cdot 2^x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ 2^x \cdot 3^y + 16 = 11 \cdot 2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^y = 2^x + 1 \\ 2^x \cdot (2^x + 1) + 16 = 11 \cdot 2^x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^y = 2^x + 1 \\ 2^{2x} + 2^x + 16 = 11 \cdot 2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^y = 2^x + 1 \\ 2^{2x} + 2^x - 11 \cdot 2^x + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^y = 2^x + 1 \\ 2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0 \end{cases} \quad \text{Θέτουμε } \omega = 2^x, \text{ οπότε } \omega^2 = 2^{2x}$$

$$\omega^2 - 10\omega + 16 = 0 \Leftrightarrow \omega = 2 \text{ ή } \omega = 8$$

$$2^x = 2 \text{ ή } 2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^1 \text{ ή } 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

$$\textcircled{x=1} \quad 3^y = 2^1 + 1 \Leftrightarrow 3^y = 3 \Leftrightarrow 3^y = 3^1 \Leftrightarrow y = 1$$

$$\textcircled{x=3} \quad 3^y = 2^3 + 1 \Leftrightarrow 3^y = 9 \Leftrightarrow 3^y = 3^2 \Leftrightarrow y = 2$$

Λύσεις του συστήματος: $(x, y) = (1, 1)$ ή $(3, 2)$.

$$ii) \begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 250 \\ 2^y \cdot 5^x = 40 \end{cases} \quad \text{Με πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη βρίσκουμε}$$

$$2^x \cdot 5^x \cdot 2^y \cdot 5^y = 10 \cdot 100 \Leftrightarrow 10^x \cdot 10^y = 10^4 \Leftrightarrow 10^{x+y} = 10^4 \Leftrightarrow x+y=4$$

Με διαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε

$$\frac{2^x}{2^y} \cdot \frac{5^y}{5^x} = \frac{25}{4} \Leftrightarrow 2^{x-y} \cdot 5^{y-x} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{2^{x-y}}{5^{x-y}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x-y} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \Leftrightarrow x-y = -2$$

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=4 \\ y=3 \end{cases}$$

Άρα $(x, y) = (1, 3)$.

$$\textcircled{+} \quad \begin{cases} 2x=2 \\ x=1 \end{cases}$$