

Κεφάλαιο 2°

Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο 2 θα πρέπει να είναι σε θέση:

- ✓ Να γνωρίζει τις πρωταρχικές έννοιες της Γεωμετρίας (σημείο, ευθεία, επίπεδο).
- ✓ Να γνωρίζει τα βασικά γεωμετρικά σχήματα (ευθύγραμμο τμήμα, γωνία, κύκλος, επίπεδο ευθύγραμμο σχήμα).

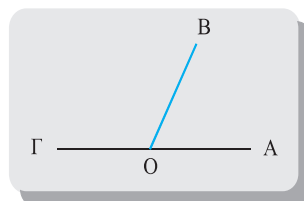
**Θεώρημα**

Δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες και αντίστροφα.

Απόδειξη

Αν οι εφεξής γωνίες $\hat{A}\hat{O}B$, $\hat{B}\hat{O}\Gamma$ (σχ. 1) είναι παραπληρωματικές, το άθροισμά τους $\hat{A}\hat{O}\Gamma$ είναι μία ευθεία γωνία. Επομένως, από τον ορισμό της ευθείας γωνίας οι πλευρές OA και OG είναι αντικείμενες ημιευθείες.

Αντίστροφα. Αν οι εφεξής γωνίες $\hat{A}\hat{O}B$, $\hat{B}\hat{O}\Gamma$ (σχ. 1) έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες, τότε από τον ορισμό του αθροίσματος δύο γωνιών προκύπτει ότι το άθροισμα των γωνιών $\hat{A}\hat{O}B$ και $\hat{B}\hat{O}\Gamma$ είναι η ευθεία γωνία $\hat{A}\hat{O}\Gamma$. Άρα, οι γωνίες $\hat{A}\hat{O}B$ και $\hat{B}\hat{O}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές.



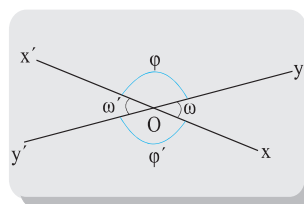
Σχήμα 1

Θεώρημα

Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

Απόδειξη

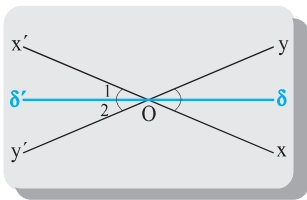
Θεωρούμε τις κατακορυφήν γωνίες $\hat{x}\hat{O}y$ και $\hat{x}'\hat{O}y'$ (σχ. 2). Παρατηρούμε ότι οι δύο γωνίες είναι ίσες ως παραπληρώματα της ίδιας γωνίας $\hat{y}\hat{O}x'$.



Σχήμα 2

Θεώρημα

Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφής της γωνίας.

Απόδειξη

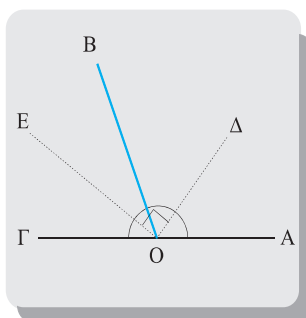
Έστω οι κατακορυφές γωνίες $\hat{x'Oy'}$ και $\hat{x'Oy}$ και η διχοτόμος $Oδ$ της $\hat{x'Oy}$. Τότε $\hat{\delta O x} = \hat{\delta O y}$.

Αν $Oδ'$ είναι η προέκταση της $Oδ$, τότε $\hat{O_1} = \hat{\delta O x}$ και $\hat{O_2} = \hat{\delta O y}$ (ως κατακορυφές).

Άρα $\hat{O_1} = \hat{O_2}$, δηλαδή η $Oδ'$ είναι διχοτόμος της $\hat{x'Oy'}$.

Θεώρημα

Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.

Απόδειξη

Έστω $\hat{AOB}$ και $\hat{BOΓ}$ δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες και OD , OE οι διχοτόμοι τους.

Τότε $\hat{AOB} + \hat{BOΓ} = 2L$ ή $2\hat{DOB} + 2\hat{BOE} = 2L$ ή

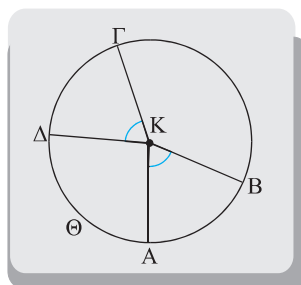
$\hat{DOB} + \hat{BOE} = 1L$ ή $\hat{DOE} = 1L$. Άρα $OD \perp OE$.

Θεώρημα

Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, αν και μόνο αν οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες.

Απόδειξη

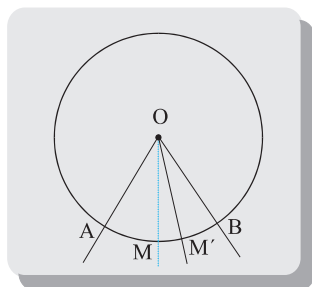
Έστω $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ δύο τόξα ενός κύκλου (Κ). Τα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$, αφού είναι ίσα μετά από κατάλληλη μετατόπιση συμπίπτουν, οπότε το Γ συμπίπτει με το Α και το Δ με το Β. Επομένως η ΚΓ θα συμπίπτει με την ΚΑ και η ΚΔ με την ΚΒ, που σημαίνει ότι οι γωνίες $\widehat{AKB}$ και $\widehat{GKD}$ είναι ίσες.



Αντίστροφα. Έστω δύο ίσες επίκεντρες γωνίες $\widehat{AKB}$ και $\widehat{GKD}$ στον κύκλο (Κ). Τότε, αφού τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι σημεία του ίδιου κύκλου, μετά από μετατόπιση της $\widehat{GKD}$ η γωνία αυτή θα ταυτισθεί με την $\widehat{AKB}$, το Γ θα ταυτισθεί με το Α και το Δ με το Β. Έτσι τα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ έχουν τα ίδια άκρα και επειδή βρίσκονται στο εσωτερικό των γωνιών που ταυτίζονται θα είναι ίσα, δηλαδή $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$.

Θεώρημα

Το μέσο ενός τόξου είναι μοναδικό.

**Απόδειξη**

Έστω $\widehat{AB}$ τόξο κύκλου, κέντρου Ο, και Μ το μέσο του. Επειδή $\widehat{MA} = \widehat{MB}$, οι επίκεντρες γωνίες $\widehat{AOM}$ και $\widehat{MOB}$ είναι ίσες και επομένως η $\widehat{OM}$ είναι διχοτόμος της $\widehat{AOB}$. Αν υποθέσουμε ότι το τόξο $\widehat{AB}$ έχει και δεύτερο μέσο το M' , τότε η $\widehat{OM'}$ είναι διχοτόμος της $\widehat{AOB}$, που είναι άτοπο γιατί η διχοτόμος μιας γωνίας είναι μοναδική.

**A. Από το σχολικό βιβλίο**

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

σ. 14: Αποδεικτικές Ασκήσεις 1, 2

σ. 20: Ασκήσεις Εμπέδωσης 1

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1,2, 3

Σύνθετα Θέματα 1

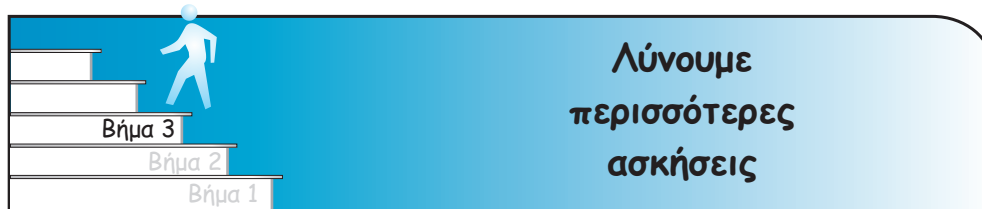
σ. 25: Ερωτήσεις Κατανόησης όλες

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1

σ. 28: Ασκήσεις Εμπέδωσης 3, 4

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1,2, 3

σ. 30: Γενικές Ασκήσεις 4, 5



1. Σε ευθεία ε θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ, Δ με $AB = 2 \cdot B\Gamma$ και

$$A\Delta = 2 \cdot \Gamma\Delta. \text{ Να δείξετε ότι: } A\Gamma = \frac{2 \cdot AB \cdot A\Delta}{AB + A\Delta}$$

Λύση:

$$\text{Έχουμε } A\Delta = 2 \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{1}{2} A\Delta.$$

$$\text{Άρα } \Gamma \text{ μέσο } A\Delta, \text{ οπότε: } A\Gamma = \frac{1}{2} A\Delta \Leftrightarrow A\Delta = 2 \cdot A\Gamma \quad (1)$$

$$\text{Επίσης } AB = 2 \cdot B\Gamma \Leftrightarrow AB + B\Gamma = 3 \cdot B\Gamma \Leftrightarrow A\Gamma = 3 \cdot B\Gamma \Leftrightarrow B\Gamma = \frac{1}{3} A\Gamma \quad (2)$$

$$\text{Άρα: } AB = 2 \cdot B\Gamma \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} AB = \frac{2}{3} A\Gamma \quad (3)$$

$$\text{Συνεπώς } \frac{2 \cdot AB \cdot A\Delta}{AB + A\Delta} = \frac{2 \cdot \frac{2}{3} A\Gamma \cdot 2 \cdot A\Gamma}{\frac{2}{3} A\Gamma + 2 \cdot A\Gamma} = \frac{\frac{8}{3} A\Gamma^2}{\left(\frac{2}{3} + 2\right) A\Gamma} = \frac{\frac{8}{3} A\Gamma^2}{\frac{8}{3} A\Gamma} = A\Gamma \text{ ο.ε.δ.}$$

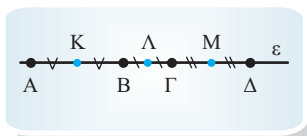
2. Σε ευθεία ε θεωρούμε διαδοχικά A, B, Γ, Δ και έστω K, Λ, M τα μέσα των $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

$$\alpha. KM = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2}$$

β. Αν $AB = \Gamma\Delta$, ποιά είναι η θέση του Λ στο $A\Delta$ και στο KM .

Λύση:

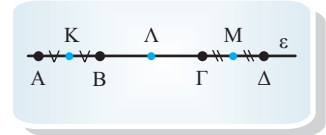
$$\alpha. \text{ Είναι: } KM = KB + B\Gamma + \Gamma M = \frac{AB}{2} + B\Gamma + \frac{\Gamma\Delta}{2} =$$



$$= \frac{AB + 2 \cdot B\Gamma + \Gamma\Delta}{2} = \frac{(AB + B\Gamma + \Gamma\Delta) + B\Gamma}{2} = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2}$$

β. Έχουμε:

- $A\Lambda = AB + B\Lambda = \Gamma\Delta + \Lambda\Gamma = \Lambda\Delta$ δηλαδή Λ μέσο $A\Delta$.



- $K\Lambda = KB + B\Lambda = \frac{AB}{2} + B\Lambda = \frac{\Gamma\Delta}{2} + \Lambda\Gamma = \Gamma M + \Lambda\Gamma = \Lambda M$ δηλαδή Λ μέσο KM

3. Να δείξετε ότι η διαφορά της συμπληρωματικής γωνίας μιας οξείας γωνίας $\hat{\omega}$ από την παραπληρωματική της είναι μια ορθή γωνία.

Λύση:

Συμπληρωματική της $\hat{\omega}$: $(90^\circ - \omega)$

Παραπληρωματική της $\hat{\omega}$: $(180^\circ - \omega)$

Άρα $(180^\circ - \omega) - (90^\circ - \omega) = 180^\circ - \omega - 90^\circ + \omega = 90^\circ$

4. Να βρεθεί γωνία ω της οποίας η παραπληρωματική της είναι ίση με τα $\frac{5}{2}$ της συμπληρωματικής της.

Λύση:

$$180^\circ - \omega = \frac{5}{2}(90^\circ - \omega) \Leftrightarrow 2(180^\circ - \omega) = 5 \cdot (90^\circ - \omega) \Leftrightarrow 360^\circ - 2\omega = 450^\circ - 5\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\omega - 2\omega = 450^\circ - 360^\circ \Leftrightarrow 3\omega = 90^\circ \Leftrightarrow \omega = 30^\circ$$

5. Έστω 3 διαδοχικές γωνίες $\hat{A\hat{O}B}$, $\hat{B\hat{O}\Gamma}$, $\hat{\Gamma\hat{O}\Delta}$ με τις ημιευθείες OA , OD αντικείμενες. Αν Ox , Oy , Oz είναι οι διχοτόμοι τους αντίστοιχα και $Oy \perp A\Delta$, να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{A\hat{O}B}$, $\hat{B\hat{O}\Gamma}$, $\hat{\Gamma\hat{O}\Delta}$, αν είναι γνωστό ότι: $x\hat{O}z = \varphi$.

Λύση:

Είναι: $\hat{A\hat{O}B} = \hat{A\hat{O}y} - \hat{y\hat{O}B} = 90^\circ - \hat{y\hat{O}B} = \hat{y\hat{O}\Delta} - \hat{y\hat{O}\Gamma} = \hat{\Gamma\hat{O}\Delta}$ δηλαδή $\hat{A\hat{O}B} = \hat{\Gamma\hat{O}\Delta}$ (1)

$$\text{Οπότε } x\hat{O}y = x\hat{O}B + B\hat{O}y = \frac{A\hat{O}B}{2} + y\hat{O}\Gamma \stackrel{(1)}{=} \frac{\Gamma\hat{O}\Delta}{2} + y\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}z + y\hat{O}\Gamma = y\hat{O}z$$

δηλαδή η Oy είναι διχοτόμος της $x\hat{O}z$.

$$\text{Άρα } x\hat{O}y = y\hat{O}z = \frac{\varphi}{2}. \text{ Ακόμα:}$$

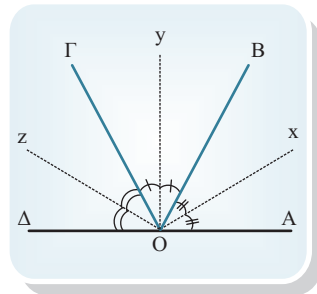
$$A\hat{O}B = 2 \cdot A\hat{O}x = 2(A\hat{O}y - x\hat{O}y) = 2\left(90^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) = 180^\circ - \varphi$$

οπότε η (1) γίνεται $\Gamma\hat{O}\Delta = 180^\circ - \varphi$.

Συνεπώς

$$B\hat{O}\Gamma = 180^\circ - 2 \cdot A\hat{O}B = 180^\circ - 2(180^\circ - \varphi) = 180^\circ - 360^\circ + 2\varphi = 2\varphi - 180^\circ$$

Παρατήρηση: Πρέπει $2\varphi - 180^\circ > 0 \Leftrightarrow \varphi > 90^\circ$.



- 6. Έστω γωνίες $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ με OG εσωτερική ημιευθεία της $A\hat{O}B$ και Ox , Oy οι διχοτόμοι τους αντίστοιχα. Να δείξετε ότι η γωνία των διχοτόμων ισούται με την ημιδιαφορά των $A\hat{O}B$ και $A\hat{O}\Gamma$. Να υπολογιστεί η $x\hat{O}y$ αν $OB \perp OG$.**

Λύση:

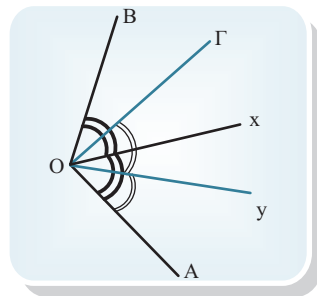
$$\text{Θα δείξουμε ότι: } x\hat{O}y = \frac{A\hat{O}B - A\hat{O}\Gamma}{2}$$

Έχουμε:

$$x\hat{O}y = x\hat{O}A - y\hat{O}A = \frac{A\hat{O}B}{2} - \frac{A\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{A\hat{O}B - A\hat{O}\Gamma}{2}$$

Αν $OB \perp OG$ τότε $B\hat{O}\Gamma = 90^\circ$, οπότε:

$$x\hat{O}y = \frac{A\hat{O}B - A\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$



- 7. Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB και κέντρον O , θεωρούμε τα σημεία Γ , Δ . Αν M , N είναι τα μέσα των $\widehat{A\Gamma}$ και $\widehat{B\Delta}$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι**

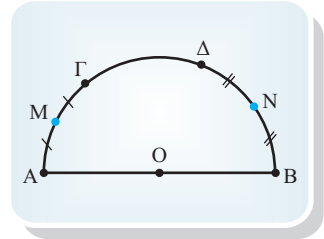
$$\widehat{MN} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{\Gamma\Delta}}{2} \text{ ή } \widehat{MN} = \frac{\widehat{A\Delta} + \widehat{B\Gamma}}{2}.$$

Λύση:

1^η περίπτωση:

Αν το Γ είναι μεταξύ Α, Δ. Τότε:

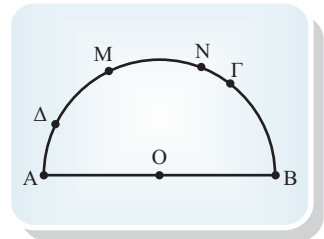
$$\begin{aligned}\widehat{MN} &= \widehat{MG} + \widehat{GD} + \widehat{DN} = \frac{\widehat{AG}}{2} + \widehat{GD} + \frac{\widehat{BD}}{2} = \\ &= \frac{\widehat{AG} + 2 \cdot \widehat{GD} + \widehat{BD}}{2} = \frac{(\widehat{AG} + \widehat{GD} + \widehat{BD}) + \widehat{GD}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{GD}}{2}\end{aligned}$$



2^η περίπτωση:

Αν το Δ είναι μεταξύ των Α, Γ. Τότε:

$$\begin{aligned}\widehat{MN} &= \widehat{AN} - \widehat{AM} = \widehat{AB} - \widehat{BN} - \widehat{AM} = \widehat{AB} - \frac{\widehat{BD}}{2} - \frac{\widehat{AG}}{2} = \\ &= \frac{2 \cdot \widehat{AB} - \widehat{BD} - \widehat{AG}}{2} = \frac{(\widehat{AB} - \widehat{BD}) + (\widehat{AB} - \widehat{AG})}{2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BG}}{2}\end{aligned}$$





1. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\phi}$ και $\hat{\omega}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- οι γωνίες είναι συμπληρωματικές και η διαφορά τους ισούται με το $1/9$ της ορθής.
- οι γωνίες είναι παραπληρωματικές και η διαφορά τους ισούται με τα $10/9$ της ορθής.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Έστω ορθή γωνία $\hat{xOy}$ και οι γωνίες $\hat{AOB}$ και $\hat{ΓΟΔ}$ τέτοιες ώστε οι ημιευθείες Ox και Oy να είναι αντίστοιχα οι διχοτόμοι τους. Αν οι ημιευθείες OB και OD βρίσκονται στο εσωτερικό της $\hat{xOy}$, δείξτε ότι οι $\hat{AOG}$ και $\hat{BOD}$ είναι παραπληρωματικές.

.....

.....

.....

.....

3. Έστω οι ημιευθείες OA, OB, OG και OD τέτοιες ώστε η γωνία $\widehat{BOG}$ να είναι ορθή. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{AOD}$ αν:
- α. οι γωνίες $\widehat{AOB}$ και $\widehat{GOD}$ είναι συμπληρωματικές.
 - β. οι γωνίες $\widehat{AOB}$ και $\widehat{GOD}$ είναι παραπληρωματικές.

4. Έστω οι γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\phi}$ οι οποίες έχουν κοινή κορυφή, μία κοινή πλευρά και δεν είναι εφεξής. Αν η διαφορά τους είναι ίση με 90° , δείξτε ότι η διαφορά των διχοτόμων τους είναι ίση με 45° .

.....

.....

.....

.....

5. Έστω γωνία $\widehat{AOB}$ και ημιευθεία OG στο εσωτερικό της τέτοια ώστε $\widehat{3AOG} = \widehat{5BOG}$. Αν η ημιευθεία OA είναι εσωτερική της $\widehat{BOG}$ να δείξετε ότι $\widehat{GOA} = \frac{\widehat{3AOA} - \widehat{5BOA}}{8}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. Θεωρούμε αμβλεία γωνία $\widehat{AOB}$ και στο εσωτερικό της την ημιευθεία $OG \perp OA$. Αν OD, OE οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{AOB}$ και $\widehat{BOG}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\widehat{DOE} = 45^\circ$.

.....

.....

.....

.....

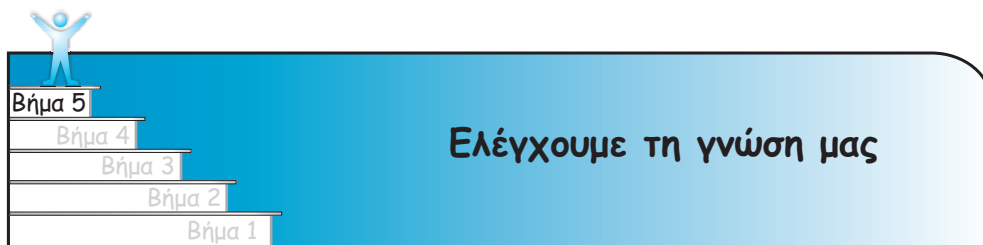
.....

.....

.....

.....

του ΜΑ ισχύει: $\Sigma M = \frac{v}{v + \mu} \Sigma A + \frac{\mu}{v + \mu} \Sigma B$.



Θέμα 1°

A. α. Να δείξετε ότι δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

(Μονάδες 12)

β. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.

(Μονάδες 13)

Θέμα 2°

A. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\omega}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. η γωνία $\hat{\omega}$ είναι τετραπλάσια από την παραπληρωματική της.

β. η γωνία $\hat{\omega}$ είναι κατά 10° μικρότερη από την συμπληρωματική της.

γ. η παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\omega}$ και η συμπληρωματική της έχουν άθροισμα ίσο με 220° .

(Μονάδες 12)

B. Έστω A,B σημεία ημικυκλίου και M το μέσο του τόξου $\widehat{AB}$.

α. Αν P σημείο του ημικυκλίου που δεν ανήκει στο $\widehat{AB}$ τότε αποδείξτε ότι

$$\widehat{PM} = \frac{\widehat{PA} + \widehat{PB}}{2}.$$

β. Αν Σ σημείο του τόξου $\widehat{MB}$ τότε αποδείξτε ότι: $\widehat{\Sigma M} = \frac{\widehat{\Sigma A} - \widehat{\Sigma B}}{2}.$

(Μονάδες 13)

Θέμα 3°

Από τυχαίο σημείο O ευθείας $x'x$ φέρουμε ημιευθείες Oy, Of, Oz προς το ίδιο μέρος της $x'x$, έτσι ώστε οι γωνίες $\angle xOy$, $\angle yOf$, $\angle fOz$, $\angle zOx'$ να είναι διαδοχικές. Αν οι γωνίες αυτές είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 3, 2, 1, 6 αντίστοιχα, να δείξετε ότι $Oz \perp x'x$.

(Μονάδες 25)

Θέμα 4°

Να αποδείξετε ότι τα μέσα δύο τόξων $\widehat{AB}$ και $\widehat{A'B'}$ στα οποία βαίνουν δύο κατακορυφήν επίκεντρες γωνίες, είναι αντιδιαμετρικά σημεία.

(Μονάδες 25)

Κεφάλαιο 3°

Τρίγωνα

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο 3 θα πρέπει να είναι σε θέση:

- ✓ Να γνωρίζει και να εφαρμόζει τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και ορθογωνίων τριγώνων.
- ✓ Να γνωρίζει τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου και του ισόπλευρου τριγώνου.
- ✓ Να γνωρίζει την έννοια του γεωμετρικού τόπου και τους τρεις βασικούς γεωμετρικούς τόπους.
- ✓ Να γνωρίζει τη σχέση μεταξύ χορδών - αποστημάτων - τόξων - επίκεντρων γωνιών.
- ✓ Να γνωρίζει πως βρίσκουμε το συμμετρικό ενός σχήματος ως προς κέντρο συμμετρίας και ως προς άξονα συμμετρίας.
- ✓ Να γνωρίζει τις σχετικές θέσεις
 - ευθείας και κύκλου
 - δύο κύκλων
- ✓ Να γνωρίζει τις ανισοτικές σχέσεις μεταξύ των πλευρών και των γωνιών του ίδιου τριγώνου και δύο διαφορετικών τριγώνων.

Στοιχεία και είδη τριγώνων

Τα τρίγωνα ανάλογα με τις πλευρές τους χωρίζονται σε:

- **Σκαληνά**, αν έχουν άνισες πλευρές.
- **Ισοκελή**, αν έχουν δυο πλευρές ίσες. Τότε η τρίτη πλευρά λέγεται **βάση** του τριγώνου και η απέναντι της κορυφή λέγεται **κορυφή** αυτού.
- **Ισόπλευρο**, αν και οι τρεις πλευρές είναι ίσες.



Σκαληνό



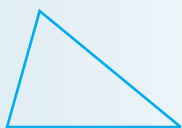
Ισοσκελές



Ισόπλευρο

Τα τρίγωνα ανάλογα με τις γωνίες τους χωρίζονται σε:

- **Οξυγώνια**, αν και οι τρεις γωνίες τους είναι οξείες.
- **Ορθογώνια**, αν έχουν μια ορθή γωνία. Τότε οι δυο πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία λέγονται **κάθετες** και η πλευρά που είναι απέναντι από την ορθή λέγεται **υποτείνουσα**.
- **Αμβλυγώνια**, αν έχουν μια αμβλεία γωνία.



Οξυγώνιο



Αμβλυγώνιο

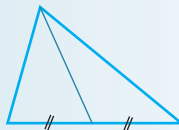


Ορθογώνιο

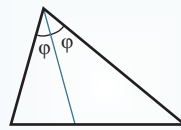
Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου είναι:

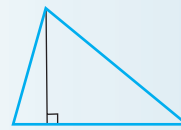
- **Η διάμεσος** που είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.
- **Η διχοτόμος** που είναι το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή μέχρι την απέναντι πλευρά.
- **Το ύψος** που είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.



Διάμεσος



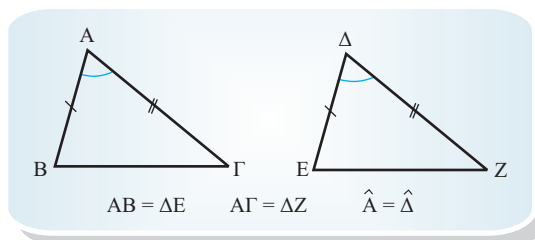
Διχοτόμος



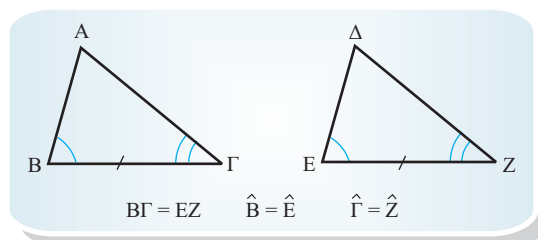
Ύψος

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

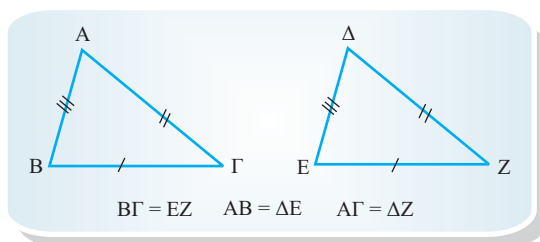
1ο κριτήριο. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα (ΠΓΠ).



2ο κριτήριο Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα (ΓΠΓ).



3ο κριτήριο Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα (ΠΠΠ).



Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

1ο κριτήριο: Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

2ο κριτήριο: Μια πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες.

Ισοσκελές τρίγωνο

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.
- Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.
- Το ύψος, που αντιστοιχεί στη βάση, είναι διχοτόμος και διάμεσος

και **αντίστροφα αν:**

σε τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διχοτόμος και διάμεσος ή διχοτόμος και ύψος ή διάμεσος και ύψος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Ισόπλευρο τρίγωνο

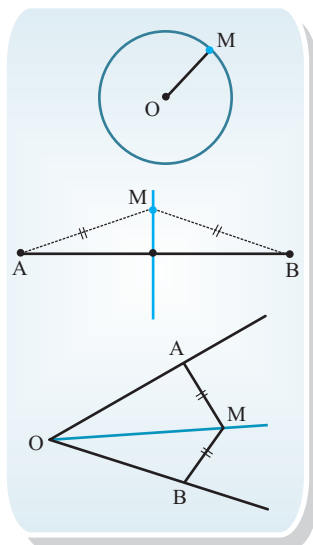
- Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.
- Η διάμεσος, η διχοτόμος και το ύψος που άγονται από κάθε κορυφή ταυτίζονται.

Γεωμετρικοί τόποι

Γεωμετρικός τόπος λέγεται το σύνολο των σημείων που έχουν μια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα. Τρεις γνωστοί μας γεωμετρικοί τόποι είναι οι παρακάτω.

1. Κύκλος

- Όλα τα σημεία του κύκλου ισαπέχουν από το κέντρο του και αντίστροφα κάθε σημείο του επιπέδου που απέχει απόσταση R από το κέντρο



του κύκλου ανήκει σε αυτόν. Άρα ο κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από σταθερό σημείο.

2. Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του και αντίστροφα κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του. Άρα η μεσοκάθετος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.

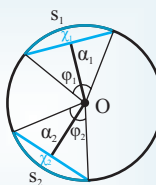
3. Διχοτόμος γωνίας

- Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου. Άρα η διχοτόμος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

Σχέση επίκεντρης γωνίας - τόξου - χορδής - αποστήματος

Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα	αν και μόνο αν	οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες.
Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα	αν και μόνο αν	οι αντίστοιχες χορδές τους είναι ίσες.
Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες	αν και μόνο αν	τα αντίστοιχα αποστήματά τους είναι ίσα

s: τόξο
χ: χορδή
φ: επίκεντρη γωνία
α: απόστημα



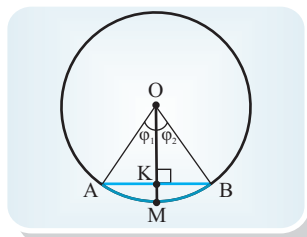
$$s_1 = s_2 \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 \Leftrightarrow \chi_1 = \chi_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

Απόστημα.

Είναι το κάθετο τμήμα που άγεται από το κέντρο του κύκλου προς τη χορδή

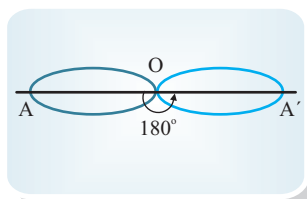
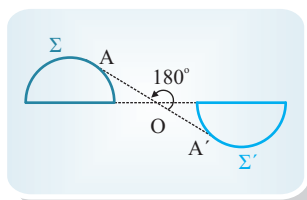
Άρα το απόστημα:

- διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.
- είναι κάθετο στη χορδή.
- διέρχεται από το μέσο της χορδής.
- διέρχεται από το μέσο του αντίστοιχου τόξου.
- διχοτομεί την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία.

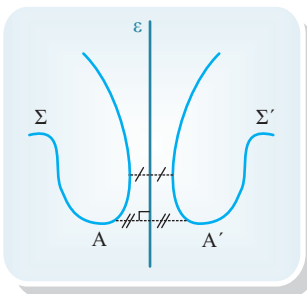
**Κεντρική συμμετρία.**

Δύο σχήματα Σ , Σ' λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο O , αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς το O . Το σημείο O λέγεται κέντρο συμμετρίας του σχήματος, που αποτελείται από τα συμμετρικά ως προς το O σχήματα Σ και Σ' . Δηλαδή ένα σημείο O λέγεται κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο A του σχήματος το συμμετρικό του A' , ως προς το O , είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με κέντρο συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει κεντρική συμμετρία.

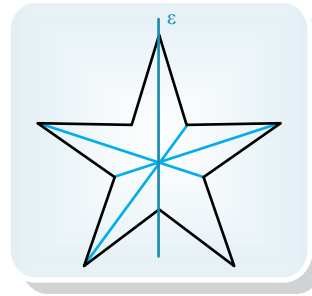
Αν στρέψουμε ένα σχήμα Σ , με κέντρο συμμετρίας το O , κατά 180° γύρω από το O , θα πάρουμε ένα σχήμα που θα συμπίπτει με το αρχικό.

**Αξονική συμμετρία.**

Δύο σχήματα Σ , Σ' λέγονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ϵ , αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς την ϵ . Η ευθεία ϵ λέγεται άξονας συμμετρίας του σχήματος που αποτελείται από τα σχήματα Σ και Σ' . Δηλαδή μια ευθεία ϵ λέγεται άξονας συμμε-



τριάς ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο A του σχήματος το συμμετρικό του A' , ως προς την ε , είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει αξονική συμμετρία. Αν ένα σχήμα έχει ως άξονα συμμετρίας μια ευθεία ε , τότε η ε χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη με τέτοιο τρόπο, ώστε, αν διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος της ε , τα μέρη αυτά θα ταυτιστούν.



Ανισοτικές σχέσεις

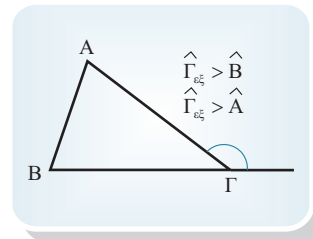
Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας.

Θεώρημα

Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε μια από τις απέναντι εσωτερικές.

Πορίσματα

- Δύο γωνίες ενός τριγώνου έχουν άθροισμα μικρότερο από 180° .
- Ένα τρίγωνο δεν μπορεί να έχει πάνω από μία ορθή ή αμβλεία γωνία.

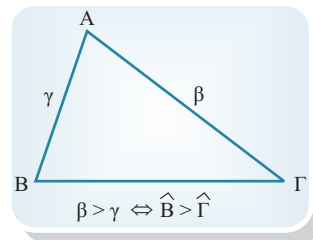


Θεώρημα

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται ομοίως άνισες πλευρές και αντίστροφα.

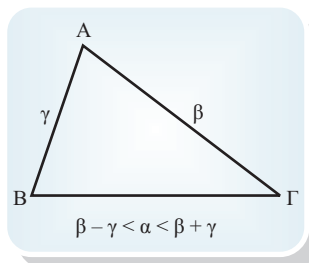
Πορίσματα

- Απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία ενός τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη πλευρά.
- Ένα τρίγωνο με δύο ίσες γωνίες είναι ισοσκελές και με τρεις ίσες γωνίες είναι ισόπλευρο.



Τριγωνική ανισότητα

Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τη διαφορά των δύο άλλων και μικρότερη από το άθροισμά τους.

**Πόρισμα**

Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση από τη διάμετρο του κύκλου.

Παρατήρηση

- Η τριγωνική ανισότητα για τυχαία σημεία A, B, Γ του επιπέδου εκφράζεται από τη σχέση $|A\Gamma - B\Gamma| \leq AB \leq A\Gamma + B\Gamma$.
- Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, τότε και οι τρίτες πλευρές είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.

Κάθετες και πλάγιες ευθείες**Θεώρημα**

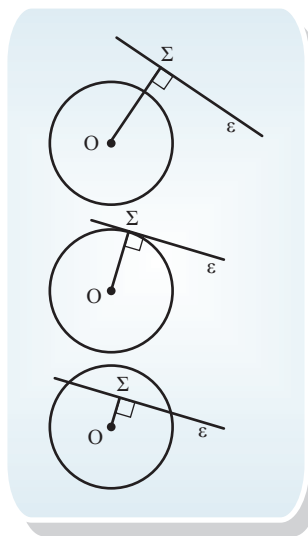
Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια τμήματα τότε:

- Αν τα δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα μεταξύ τους τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου και αντίστροφα.
- Αν τα δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα μεταξύ τους τότε οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.
- Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από οποιοδήποτε πλάγιο.

Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

Έστω κύκλος (O, ρ) και $O\Sigma$ η απόσταση μιας ευθείας ε από το κέντρο O .

- Αν ισχύει $O\Sigma > \rho$ τότε η ευθεία δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται εξωτερική του κύκλου.
- Αν ισχύει $O\Sigma = \rho$ τότε η ευθεία έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται εφαπτόμενη του κύκλου και είναι μοναδική για το συγκεκριμένο σημείο επαφής. Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτόμενη.
- Αν ισχύει $O\Sigma < \rho$ τότε η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία



με τον κύκλο και λέγεται τέμνουσα του κύκλου.

Εφαπτομένη κύκλου

Μια ευθεία που έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον κύκλο λέγεται εφαπτομένη του κύκλου

Η εφαπτομένη:

- Είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής.
- Σε κάθε σημείο του κύκλου είναι μοναδική.

Θεώρημα

Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Πόρισμα

Τρία σημεία ενός κύκλου δεν μπορεί να είναι συνευθειακά.

Διακεντρική ευθεία

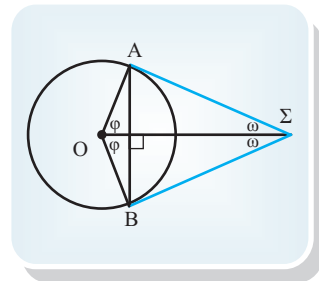
Διακεντρική ευθεία σημείου Σ λέγεται η ευθεία ΣO η οποία διέρχεται από το σημείο Σ και το κέντρο O του κύκλου.

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα R , Σ σημείο εκτός του κύκλου και ΣA , ΣB τα εφαπτόμενα τμήματα από το Σ προς τον κύκλο. Τα τρίγωνα $\Sigma O A$

και $\Sigma O B$ είναι ίσα, επομένως **τα εφαπτόμενα τμήματα ΣA , ΣB είναι ίσα.**

Τότε η διακεντρική ευθεία:

- είναι μεσοκάθετος της χορδής AB
- διχοτομεί τη γωνία $\widehat{A O B}$
- διχοτομεί τη γωνία $\widehat{A \Sigma B}$



Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Έστω κύκλοι (O, R) και (K, ρ) με $R > \rho$. Το ευθύγραμμο τμήμα KO που ενώνει τα κέντρα των δύο κύκλων λέγεται διάκεντρος. Έστω $KO = \delta$.

- Αν ισχύει $\delta > R + \rho$ τότε οι κύκλοι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
- Αν ισχύει $\delta = R + \rho$ τότε οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο τομής τους με τη διάκεντρο.
- Αν ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$ τότε οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία τα

οποία είναι τα άκρα της κοινής χορδής τους.

- Αν ισχύει $\delta = R - \rho$ τότε οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.
- Αν ισχύει $\delta < R - \rho$ τότε ο κύκλος (K, ρ) είναι εσωτερικός του κύκλου (O, R) .

Θεώρημα

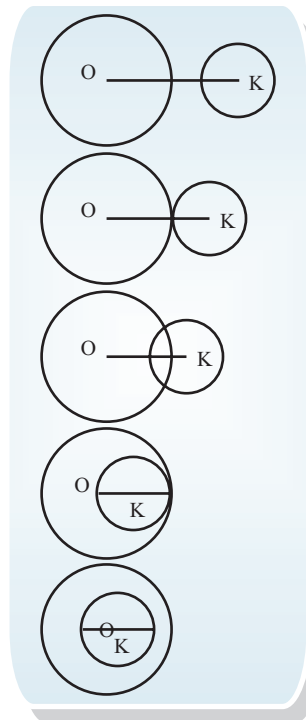
Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους. Στην περίπτωση που οι δύο κύκλοι είναι ίσοι, η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.

Θεώρημα

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Πόρισματα.

- Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.
- Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180° .





Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

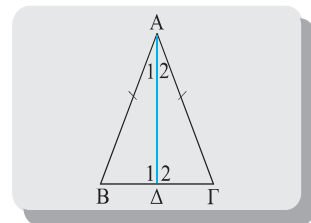
- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.

Φέρουμε τη διχοτόμο του $A\Delta$. Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$ έχουν $AB = A\Gamma$, $A\Delta$ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι $B\Delta = \Delta\Gamma$, οπότε η $A\Delta$ είναι διάμεσος και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ$ προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90^\circ$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου.

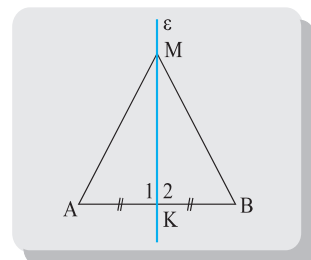


Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Απόδειξη

Έστω ε η μεσοκάθετος ενός τμήματος AB και M ένα

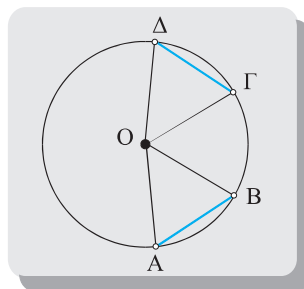
σημείο της. Τα τρίγωνα MKA και MKB έχουν $KA = KB$, MK κοινή και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90^\circ$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $MA = MB$.



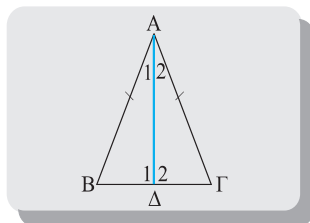
Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ δύο ίσα τόξα ενός κύκλου (O, ρ) . Τότε είναι $\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$. Τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ έχουν $OA = O\Gamma (= \rho)$, $OB = O\Delta (= \rho)$ και $\hat{A}\hat{O}\hat{B} = \hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$. Επομένως είναι ίσα, οπότε $AB = \Gamma\Delta$.



Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

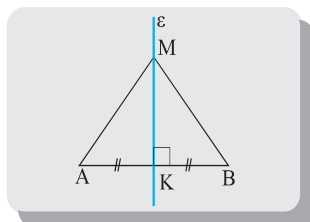


Σχήμα 1

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και AD η διάμεσός του (σχ.1). Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ έχουν $AB = A\Gamma$, AD κοινή και $B\Delta = \Delta\Gamma$, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από τις ισότητες αυτές προκύπτει αντίστοιχα ότι η AD είναι διχοτόμος και ύψος.

Κάθε σημείο πού ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.



Σχήμα 2

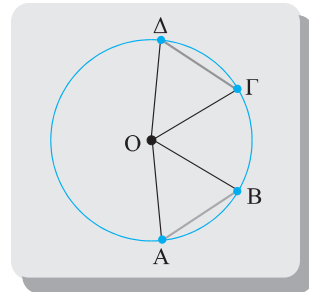
Απόδειξη

Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB (σχ. 2), M ένα σημείο, ώστε $MA = MB$ και K το μέσο του AB . Τότε το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές και η MK διάμεσός του, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, η MK θα είναι και ύψος δηλαδή η MK είναι μεσοκάθετος του AB .

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

Απόδειξη

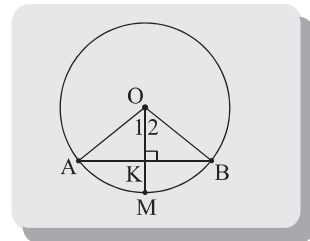
Έστω δύο τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{\Gamma\Delta}$ ενός κύκλου (O, ρ) μικρότερα του ημικυκλίου, με $AB = \Gamma\Delta$. Τότε τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ έχουν: $OA = O\Gamma (= \rho)$, $OB = O\Delta (= \rho)$ και $AB = \Gamma\Delta$, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα. Επομένως, $\widehat{AOB} = \widehat{\Gamma\Delta}$, οπότε $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$.



Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (O, ρ) , μια χορδή του AB και την κάθετη OK της AB , που τέμνει τον κύκλο στο σημείο M . Επειδή το τμήμα OK είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο OAB ($OA = OB = \rho$), σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα είναι διάμεσος και διχοτόμος, δηλαδή το K είναι μέσο του AB και $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$. Αφού $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ προκύπτει ότι $\widehat{AM} = \widehat{MB}$.



Θεώρημα

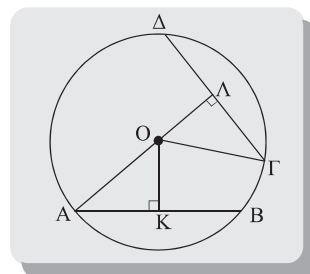
Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω οι ίσες χορδές AB και $\Gamma\Delta$ ενός κύκλου (O, ρ) και OK , OL τα αποστήματά τους αντίστοιχα (σχ.29). Τα τρίγωνα KOA και LOG , έχουν $\widehat{K} = \widehat{L} = 90^\circ$, $OA = O\Gamma (= \rho)$ και $AK = \Gamma L$ (αφού $AB = \Gamma\Delta$). Επομένως είναι ίσα, οπότε $OK = OL$.

Αντίστροφα. Έστω ότι τα αποστήματα OK και OL είναι ίσα. Τότε τα τρίγωνα KOA και LOG έχουν $\widehat{K} = \widehat{L} = 90^\circ$, $OA = O\Gamma$ και $OK = OL$, επομένως είναι ίσα, οπότε

$$AK = \Gamma L \quad \text{ή} \quad \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad \text{ή} \quad AB = \Gamma\Delta.$$



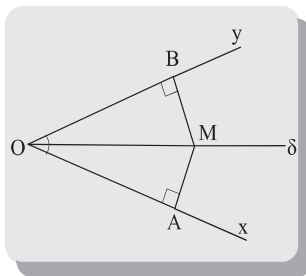
Θεώρημα

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Απόδειξη

Έστω μια γωνία $\angle xOy$ και M ένα σημείο της διχοτόμου της $O\delta$ (σχ.30). Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AOM$ και $\triangle BOM$ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OM κοινή και $\hat{M\hat{O}A} = \hat{M\hat{O}B}$, επομένως $MA = MB$.

Αντίστροφα. Έστω M ένα εσωτερικό σημείο της γωνίας. Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$ και υποθέτουμε ότι $MA = MB$. Τότε τα τρίγωνα $\triangle AOM$ και $\triangle BOM$ είναι πάλι ίσα, αφού $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OM κοινή και $MA = MB$ και επομένως $\hat{M\hat{O}A} = \hat{M\hat{O}B}$, οπότε το M είναι σημείο της διχοτόμου $O\delta$.

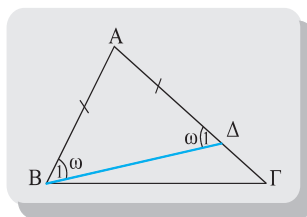
**Θεώρημα**

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

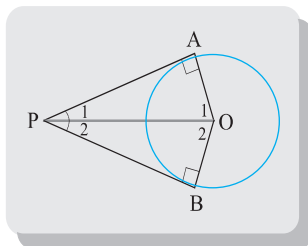
Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $\beta > \gamma$ (σχ. 1). Τότε υπάρχει μοναδικό εσωτερικό σημείο Δ της AG , ώστε $A\Delta = AB$. Το τρίγωνο $\triangle ABA\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση BA και επομένως $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$. Επειδή η $BA\Delta$ είναι εσωτερική ημιευθεία της γωνίας $\hat{B}$, είναι $\hat{B} > \hat{B}_1$, ενώ η $\hat{\Delta}_1$, ως εξωτερική γωνία του τριγώνου $\triangle B\Delta\Gamma$ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 > \hat{\Gamma}$. Έτσι έχουμε $\hat{B} > \omega$ και $\omega > \hat{\Gamma}$, επομένως $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.

Αντίστροφα. Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Τότε θα είναι και $\beta > \gamma$, γιατί αν ήταν $\beta = \gamma$ ή $\beta < \gamma$ θα είχαμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ή $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, που είναι άτοπο.



Σχήμα 1



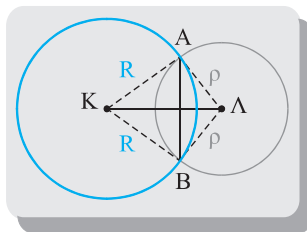
Σχήμα 2

Θεώρημα

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Απόδειξη

Τα τρίγωνα AOP και BOP (σχ. 2) έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OP κοινή και $OA = OB (= \rho)$, άρα είναι ίσα, οπότε $PA = PB$.



Σχήμα 3

Θεώρημα

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

Απόδειξη

Έστω οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) (σχ. 3) και A, B τα σημεία τομής τους. Επειδή $KA = KB = R$, το σημείο K είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AB. Όμοια από την $LA = LB = \rho$ προκύπτει ότι και το Λ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AB. Άρα, η KΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής AB του κύκλου.

**A. Από το σχολικό βιβλίο****ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.**

σ. 38: Ασκήσεις Εμπέδωσης 1, 2, 3, 4

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1, 2, 3

σ. 43: Ασκήσεις Εμπέδωσης 1, 3

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1, 2, 3

Σύνθετα θέματα 2

σ. 48: Ασκήσεις Εμπέδωσης 1, 2, 3

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1, 4, 5

σ. 57: Ερωτήσεις Κατανόησης 1, 3

Ασκήσεις Εμπέδωσης 1, 2, 5, 6, 7, 8

Αποδεικτικές Ασκήσεις 2, 3, 5

Σύνθετα θέματα 1, 3

σ. 63: Ασκήσεις Εμπέδωσης 1, 2

Αποδεικτικές Ασκήσεις 2, 3

σ. 66: Αποδεικτικές Ασκήσεις 3

σ. 70: Γενικές Ασκήσεις 5, 6



1. Να αποδείξετε ότι το μέσο M τόξου $\widehat{AB}$ ισαπέχει από τις ακτίνες που αντιστοιχούν στα άκρα του τόξου και μάλιστα απόσταση ίση με το μισό της αντίστοιχης χορδής.

Λύση:

Φέρουμε $ME \perp OA$, $MZ \perp OB$. Θα δείξουμε ότι:

$ME = MZ = \frac{AB}{2}$. Η ακτίνα OM είναι διχοτόμος της

$\widehat{AOB}$, αφού $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$, διότι $\widehat{AM} = \widehat{MB}$ και σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου αντιστοιχούν ίσες επίκεντρες γωνίες. Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle EOM$ και

$\triangle ZOM$ είναι ίσα, διότι έχουν: (1) $OM = OM$ (κοινή)

(2) $\widehat{EOM} = \widehat{ZOM}$ (το αποδείξαμε παραπάνω).

Συνεπώς $ME = MZ$ (1)

Επειδή το M είναι μέσο του $\widehat{AB}$, ως γνωστόν ισχύει $OM \perp AB$ και αν Δ είναι το σημείο τομής των OM και AB , το Δ είναι μέσο του AB .

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle O\Delta\Delta$, $\triangle OME$ έχουν:

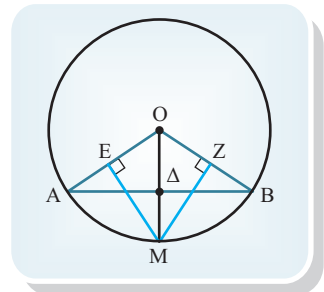
(1) $OA = OM$ (ως ακτίνες του κύκλου)

(2) $\widehat{AOD} = \widehat{EOM}$ (κοινή)

Άρα τα τρίγωνα $\triangle O\Delta\Delta$ και $\triangle OME$ είναι ίσα, οπότε είναι:

$$ME = \Delta\Delta \Leftrightarrow ME = \frac{AB}{2} \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε: $ME = MZ = \frac{AB}{2}$.



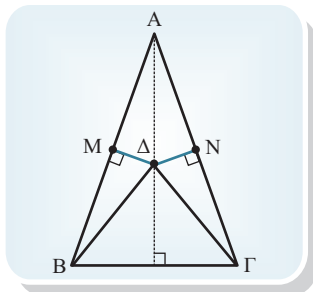
2. Στο εσωτερικό ισοσκελούς τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), παίρνουμε σημείο Δ το οποίο ισαπέχει από τα άκρα της βάσης του. Να αποδείξετε

ότι το Δ ισαπέχει και από τα ίσα σκέλη του τριγώνου.

Λύση:

Επειδή το Δ ισαπέχει από τα B, Γ συμπεραίνουμε ότι ανήκει στην μεσοκάθετο του $B\Gamma$. Όπως είναι γνωστό η μεσοκάθετος της βάσης ισοσκελούς τριγώνου διέρχεται από την κορυφή του, αφού και αυτή ισαπέχει από τα άκρα της βάσης. Άρα η $A\Delta$ είναι

ύψος και διάμεσος του $\triangle AB\Gamma$, οπότε θα είναι και διχοτόμος. Επειδή λοιπόν το Δ ανήκει στην διχοτόμο της $\hat{A}$, θα ισαπέχει από τις πλευρές της.



3. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Εκατέρωθεν της $B\Gamma$ φέρουμε στα άκρα της B και Γ ημιευθείες κάθετες σ' αυτήν, επί των οποίων παίρνουμε τα ίσα τμήματα BD και ΓE . Αφού δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $B\Gamma$ και ΔE τέμνονται, έστω σε σημείο M , στη συνέχεια να δείξετε ότι $AM \perp B\Gamma$.

Λύση:

Εφόσον τα Δ, E βρίσκονται εκατέρωθεν του $B\Gamma$ και τα B, Γ εκατέρωθεν του ΔE , τα ευθύγραμμα τμήματα $B\Gamma$ και ΔE τέμνονται σε εσωτερικό τους σημείο

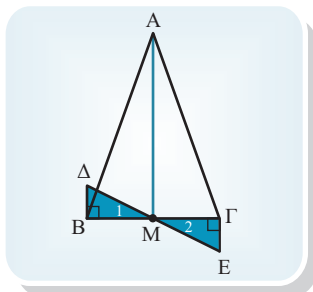
M . Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle MB\Delta$ και $\triangle M\Gamma E$ έχουν:

(1) $BD = \Gamma E$ (υπόθεση).

(2) $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (ως κατακορυφήν γωνίες).

Άρα $\triangle MB\Delta = \triangle M\Gamma E$, οπότε $MB = M\Gamma$. Δηλαδή το M

είναι μέσο του $B\Gamma$. Συνεπώς στο ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ η AM είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην βάση του $B\Gamma$, άρα θα είναι και ύψος, δηλαδή $AM \perp B\Gamma$.



4. Σε κάθε σκαληνό τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$, η διχοτόμος $A\Delta$ χωρίζει την πλευρά $B\Gamma$ σε τμήματα ομοίως άνισα με τις προσκείμενες πλευρές του τριγώνου.

Λύση:

Έστω $AB < A\Gamma$. Θα δείξουμε ότι: $\Delta B < \Delta \Gamma$. Στην $A\Gamma$ παίρνουμε τμήμα $AE = AB$.

Τότε τα τρίγωνα $\triangle A\Delta B, \triangle A\Delta E$ έχουν:

(1) $A\Delta = A\Delta$ (κοινή)

(2) $AB = AE$ (από κατασκευή)

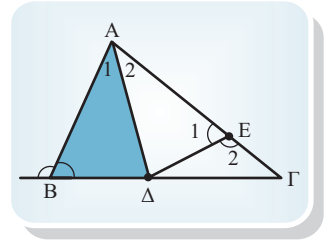
(3) $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ($\Delta\Delta$: διχοτόμος της $\hat{A}$)

Άρα $\Delta\hat{A}B = \Delta\hat{A}E$ (ΠΓΠ), οπότε: $\Delta B = \Delta E$ (1) και

$\hat{B} = \hat{E}_1$ (2) άρα $\hat{B}_{εξ} = \hat{E}_2$ (παραπληρώματα ίσων γωνιών).

Όμως $\hat{B}_{εξ} > \hat{\Gamma}$ άρα $\hat{E}_2 > \hat{\Gamma}$, οπότε από το τρίγωνο

$\Delta\hat{E}\Gamma$ συμπεραίνουμε ότι $\Delta\Gamma > \Delta E \Leftrightarrow \Delta\Gamma > \Delta B$. Ομοίως αποδεικνύεται και στην περίπτωση που $AB > AG$.



5. Σε τρίγωνο $\Delta\hat{B}\Gamma$ με $\beta > \gamma$, να δείξετε ότι: $\delta_a < \mu_a$.

Λύση:

Φέρουμε $AD = \delta_a$, $AM = \mu_a$ και το ύψος AE .

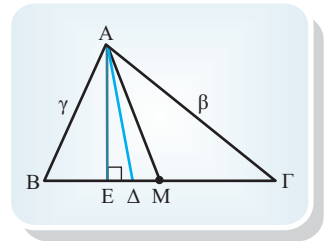
Όπως αποδείξαμε στην προηγούμενη άσκηση, αφού $AB < AG$ θα ισχύει:

$$\Delta B < \Delta\Gamma \Leftrightarrow \Delta B + \Delta B < \Delta B + \Delta\Gamma \Leftrightarrow 2 \cdot \Delta B < B\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta B < \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Delta B < MB \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta B - EB < MB - EB \Leftrightarrow \Delta E < ME$$

Όμως, αν τα ίχνη δύο πλαγίων τμημάτων απέχουν άνισα από το ίχνος της κάθετης, τότε τα πλάγια τμήματα είναι όμοιως άνισα. Άρα $AD < AM$ ή $\delta_a < \mu_a$.



6. Σε τρίγωνο $\Delta\hat{B}\Gamma$ θεωρούμε τυχαίο σημείο K της πλευράς BG. Να δείξετε ότι: $\tau - \alpha < AK < \tau$.

Λύση:

Από τα τρίγωνα $\Delta\hat{B}K$, $\Delta\hat{A}K$, έχουμε:

$$\bullet AB < BK + AK \quad (1)$$

$$\bullet AG < GK + AK \quad (2)$$

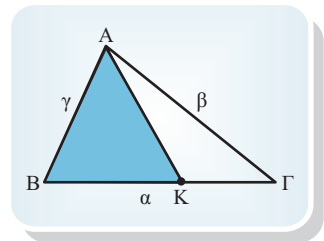
Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε:

$$AB + AG < (BK + GK) + 2AK \Leftrightarrow \gamma + \beta < \alpha + 2AK \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\gamma + \beta) - \alpha < 2AK \Leftrightarrow 2\tau - \alpha - \alpha < 2AK \Leftrightarrow 2\tau - 2\alpha < 2AK \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\tau - \alpha) < 2AK \Leftrightarrow \tau - \alpha < AK \quad (3)$$

Επίσης από τα ίδια τρίγωνα έχουμε:



$$\bullet AK < AB + BK \quad (4)$$

$$\bullet AK < AG + KG \quad (5)$$

Προσθέτουμε τις (4), (5) κατά μέλη και έχουμε:

$$2AK < AB + AG + (BK + KG) \Leftrightarrow 2AK < \gamma + \beta + \alpha \Leftrightarrow 2AK < 2 \cdot \tau \Leftrightarrow AK < \tau \quad (6)$$

Από (3) και (6) έχουμε: $\tau - \alpha < AK < \tau$

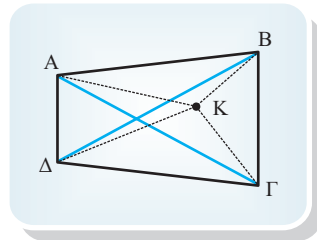
7. Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο

Κ στο εσωτερικό του. Να δείξετε ότι:

$$\alpha. \frac{1}{2}\rho < KA + KB + KG + KD < \frac{3}{2}\rho$$

$$\beta. AG + BD \leq KA + KB + KG + KD$$

$$\text{όπου } \rho = AB + BG + GD + DA.$$



Λύση:

α. Από τα τρίγωνα $\triangle KAB$, $\triangle KBG$, $\triangle KGD$, $\triangle KDA$ έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet AB < KA + KB \\ \bullet BG < KB + KG \\ \bullet GD < KG + KD \\ \bullet DA < KD + KA \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \rho < 2(KA + KB + KG + KD) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\rho < KA + KB + KG + KD \quad (1)$$

Επειδή το Κ είναι εσωτερικό σημείο του ΑΒΓΔ έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet KA + KB < AD + DG + GB \\ \bullet KB + KG < BA + AD + DG \\ \bullet KG + KD < GB + BA + AD \\ \bullet KD + KA < DG + GB + BA \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} 2(KA + KB + KG + KD) < 3(AB + BG + GD + DA) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow KA + KB + KG + KD < \frac{3}{2}\rho \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι: $\frac{1}{2}\rho < KA + KB + KG + KD < \frac{3}{2}\rho$

β. Για την τριάδα των σημείων Κ, Α, Γ ισχύει:

$$AG \leq KA + KG \quad (3) \text{ (το ίσον ισχύει αν το Κ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ). Ομοίως και } BD \leq KB + KD \quad (4)$$

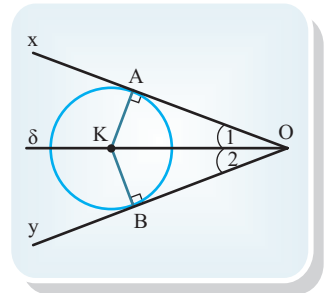
Οπότε από (3) και (4) έχουμε $AG + BD \leq KA + KB + KG + KD$

Το ίσον ισχύει αν το Κ είναι το σημείο τομής των ΑΓ, ΒΔ.

8. Έστω γωνία $x\hat{O}y$ και τυχαίο σημείο K της διχοτόμου της $O\delta$. Αν $KA \perp Ox$, ποιά είναι η σχετική θέση του κύκλου (K, KA) με την ευθεία Oy .

Λύση:

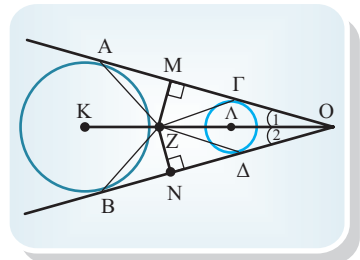
Ως γνωστόν η σχετική θέση μιας ευθείας και ενός κύκλου εξαρτάται από την απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία. Γι' αυτό φέρουμε την $KB \perp Oy$ και θα την συγκρίνουμε με την ακτίνα του κύκλου. Επειδή το K ανήκει στην διχοτόμο της $x\hat{O}y$, θα ισαπέχει από τις πλευρές της. Άρα $KB = KA$. Συνεπώς ο (K, KA) εφάπτεται στην ευθεία Oy .



9. Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) με $R > \rho$, που δεν τέμνονται. Φέρουμε τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες τους. Να δείξετε ότι:
- τέμνονται σε σημείο της διακέντρου.
 - οι μεσοκάθετοι των κοινών εξωτερικών εφαπτόμενων τμημάτων τέμνονται σε σημείο της διακέντρου.

Λύση:

- α. Στον (K, R) η διάκεντρος OK διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}B$ των εφαπτομένων τμημάτων. Ομοίως στον (Λ, ρ) η OL διχοτομεί την $\Gamma\hat{O}\Delta$. Επειδή όμως η διχοτόμος γωνίας είναι μοναδική, συμπεραίνουμε ότι οι ευθείες OK και OL ταυτίζονται. Άρα, το O ανήκει στην διάκεντρο KL .



- β. Έστω Z το σημείο τομής της διακέντρου KL και της μεσοκάθετου του AG . Τότε $AZ = Z\Gamma$ (1).

Αρκεί να δείξουμε ότι το Z ανήκει στην μεσοκάθετο του $B\Delta$, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι: $ZB = Z\Delta$.

Τα τρίγωνα $\triangle Z\hat{O}\Gamma$ και $\triangle Z\hat{O}\Delta$ έχουν:

- $\bullet$ $OZ = OZ$ (κοινή)
- $\bullet$ $O\Gamma = O\Delta$ (εφαπτόμενα τμήματα)
- $\bullet$ $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (OL διχοτόμος της $\Gamma\hat{O}\Delta$)

Άρα $\triangle Z\hat{O}\Gamma = \triangle Z\hat{O}\Delta$ (ΠΓΠ), οπότε: $Z\Gamma = Z\Delta$ (2)

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\triangle Z\hat{O}A = \triangle Z\hat{O}B$, οπότε $ZA = ZB$ (3)

Η (1) δια μέσου των (2) (3) γίνεται $ZB = Z\Delta$.



1. Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και Σ εσωτερικό σημείο του. Οι $B\Sigma$ και $\Gamma\Sigma$ τέμνουν τις $A\Gamma$ και AB στα E και Δ αντίστοιχα. Αν $BA = \Gamma E$ και $\widehat{BAE} = \widehat{GE\Delta}$ δείξτε ότι το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Έστω κύκλος (O, ρ) και K τυχαίο σημείο του. Αν ο κύκλος (K, ρ) τέμνει τον προηγούμενο στα σημεία A και B , δείξτε ότι:
- α. οι γωνίες $\widehat{AOB}$ και $\widehat{AKB}$ είναι ίσες και η OK είναι διχοτόμος τους.
- β. οι OK και AB είναι κάθετες.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\triangle A\hat{B}B\Gamma$ και ευθεία ε παράλληλη στην βάση $B\Gamma$ που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα Δ και E αντίστοιχα. Αν H και Θ είναι οι προβολές των Δ και E αντίστοιχα πάνω στην $B\Gamma$, δείξτε ότι $BH = \Gamma\Theta$.

4. Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά, μια προσκείμενη γωνία και την αντίστοιχη διχοτόμο της ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

.....

.....

.....

.....

.....

- 5.** Να δείξετε ότι αν ενώσουμε τα μέσα των πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου, σχηματίζεται ισοσκελές τρίγωνο.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 6.** Δίνεται γωνία $\widehat{\chi\hat{O}\psi}$ και τυχαίο σημείο Σ της διχοτόμου $Οδ$. Πάνω στην $Οχ$ παίρνουμε τμήματα $ΟΑ$, $ΟΒ$ και στην $Ο\psi$ παίρνουμε $ΟΓ = ΟΑ$ και $ΟΔ = ΟΒ$. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $\Sigma\overset{\Delta}{A}B$ και $\Sigma\overset{\Delta}{\Gamma}D$ είναι ίσα.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. Έστω Σ τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος AB . Η κάθετος προς τη ΣA στο Σ τέμνει την AB στο E και η κάθετος προς τη ΣB στο Σ τέμνει την AB στο H . Δείξτε ότι το Σ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του HE .

8. Έστω τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ με κοινή κορυφή την A και $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{\Delta\hat{A}E}$. Να δείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$ ή $BE = \Gamma\Delta$.

9. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και ευθείες ε_1 και ε_2 παράλληλες στη βάση του που τέμνουν την AB στα E και H και την $A\Gamma$ στα Z και Θ . Δείξτε ότι τα τρίγωνα $BZ\Theta$ και $\Gamma E\Theta$ είναι ίσα.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές AB και $A\Gamma$ κατά τμήματα $BE = AB$ και $\Gamma Z = A\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα σημεία E και Z ισαπέχουν από τη $B\Gamma$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

11. Αποδείξτε ότι αν ένα τρίγωνο έχει δύο ύψη ίσα μεταξύ τους τότε είναι ισοσκελές και αντίστροφα.

.....

.....

.....

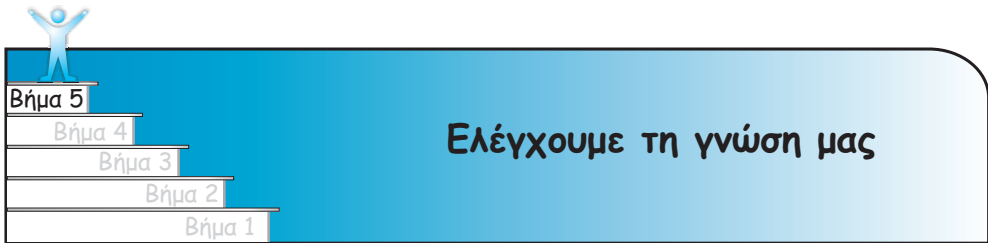
.....

.....

.....

.....

.....

**Θέμα 1^ο**

- A. Να δείξετε ότι αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα τότε και οι χορδές τους είναι ίσες και αντίστροφα αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μικρότερων του ημικυκλίου είναι ίσες τότε και τα τόξα είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

- B. Να δείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

(Μονάδες 13)

Θέμα 2^ο

- A. Έστω τρίγωνο ABΓ και Αx η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επάνω στην Αx παίρνουμε τα σημεία Μ και Ν έτσι ώστε $AM = AB$ και $AN = AG$. Να δείξετε ότι $BN = ΓΜ$.

(Μονάδες 12)

- B. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Φέρνουμε $AE \perp AG$ και $AE = AG$ με $AD \perp AB$ με $AD = AB$. Έστω Ζ, Θ τα μέσα των ΓΔ, BE. Να δείξετε ότι $AZ = A\Theta$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 3^ο

- A. Δίνονται οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Από το Α φέρνουμε ευθεία που τέμνει τους κύκλους (Κ, R), (Λ, ρ) στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Αν (ε) είναι η εφαπτομένη του κύκλου (Κ, R) στο σημείο Β, να δείξετε ότι:

i. $\angle \Gamma A = \angle KBA$

ii. $\Gamma \Lambda \perp (\epsilon)$

(Μονάδες 12)

- B. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ABΓ και εξωτερικά από αυτό τα ισόπλευρα τρίγωνα ABE, BΓΔ και AΓΗ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΗ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

Θέμα 4^ο

Στις πλευρές Ox και Oy μιας γωνίας $\widehat{xOy}$ παίρνουμε αντίστοιχα ίσα τμήματα $OA = OB$. Στο εσωτερικό της γωνίας φέρνουμε ημιευθείες Oz και Oh τέτοιες ώστε

$\widehat{xOz} = \widehat{yOh}$ και $\widehat{xOz} < \frac{\widehat{xOy}}{2}$. Στις ημιευθείες Oz και Oh παίρνουμε αντίστοιχα ίσα

τμήματα $OM = ON$. Αν οι AN και BM τέμνονται στο Σ να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΣAM και ΣBN είναι ίσα.

ii. Η διχοτόμος της $\widehat{xOy}$ διέρχεται από το Σ .

(Μονάδες 25)

Κεφάλαιο 4°

Παράλληλες ευθείες

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο 4 θα πρέπει να είναι σε θέση:

- ✓ Να γνωρίζει τη σχετική θέση δύο ευθειών.
- ✓ Να γνωρίζει τη σχέση μεταξύ γωνιών που σχηματίζονται από δύο παράλληλες ευθείες οι οποίες τέμνονται από μια τρίτη ευθεία.
- ✓ Να γνωρίζει διάφορους τρόπους με τους οποίους θα αποδεικνύει ότι δύο οι περισσότερες ευθείες είναι παράλληλες.
- ✓ Να γνωρίζει ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 2 ορθές και τις διάφορες σημαντικές προτάσεις και πορίσματα που προκύπτουν.
- ✓ Να γνωρίζει και να εφαρμόζει τη σχέση γωνιών με πλευρές παράλληλες ή κάθετες.
- ✓ Να γνωρίζει το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου καθώς και το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του.
- ✓ Να γνωρίζει τους αξιοσημείωτους κύκλους ενός τριγώνου.

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών.

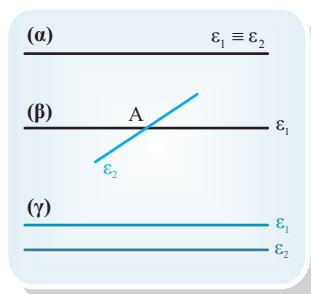
Οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών ε_1 και ε_2 του ίδιου επιπέδου είναι οι παρακάτω:

- Ταυτίζονται. (άπειρα κοινά σημεία).

Συμβολίζουμε $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$.

- Τέμνονται. (ένα κοινό σημείο).
- Δεν τέμνονται. (κανένα κοινό σημείο).

Στην περίπτωση αυτή οι ευθείες ονομάζονται **παράλληλες** και συμβολίζουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Τέμνουσα δύο ευθειών.

Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του επιπέδου οι οποίες τέμνονται από μια τρίτη ευθεία ε_3 . Τότε σχηματίζονται τα εξής ζεύγη γωνιών:

- **Γωνίες εντός εναλλάξ.**

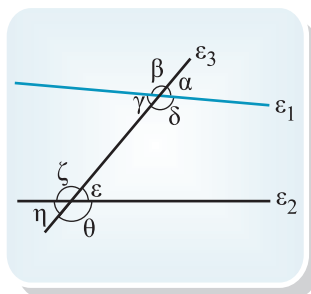
Είναι γωνίες που βρίσκονται εντός της ζώνης που δημιουργούν οι ευθείες ε_1 και ε_2 και σε διαφορετικά ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία ε_3 . Τέτοιες είναι οι γ , ε και δ , ζ .

- **Γωνίες εντός και επί τα αυτά μέρη.**

Είναι γωνίες που βρίσκονται εντός των ευθειών ε_1 και ε_2 και στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία ε_3 . Τέτοιες είναι οι δ , ε και γ , ζ .

- **Γωνίες εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη.**

Είναι γωνίες που βρίσκονται μια εντός και μία εκτός των ευθειών ε_1 και ε_2 και στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία ε_3 . Τέτοιες είναι οι α , ε και β , ζ και δ , θ και η , γ .

**Θεώρημα**

Αν δύο ευθείες ε_1 , ε_2 τεμνόμενες από τρίτη ευθεία ε σχηματίζουν τις:

- εντός εναλλάξ γωνίες ίσες τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.
- εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.
- εντός και επί τα αυτά γωνίες ίσες τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

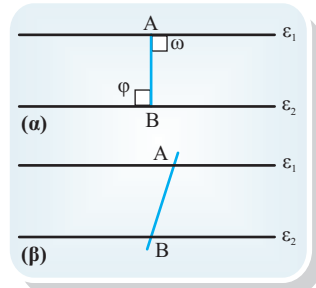
και αντίστροφα.

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν:

- τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.
- τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες,
- τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

Πορίσματα

- Δύο ευθείες κάθετες σε διαφορετικά σημεία στην ίδια ευθεία, είναι μεταξύ τους παράλληλες (σχ.α).
- Δύο ευθείες παράλληλες στην ίδια ευθεία, είναι και μεταξύ τους παράλληλες.
- Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία τέμνει μία από αυτές τότε τέμνει και την άλλη (σχ.β).
- Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία τέμνει κάθετα μία από αυτές τότε τέμνει κάθετα και την άλλη.



Το Ευκλείδειο Αίτημα της Παράλληλίας.

Από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη προς αυτή.

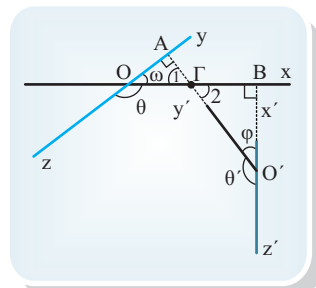
Πρόταση.

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από μία τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

Γωνίες με πλευρές παράλληλες ή κάθετες.

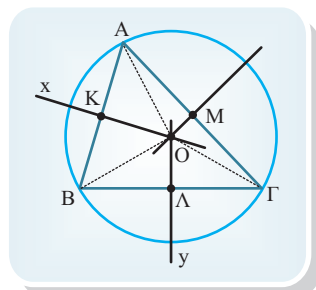
Αν δύο γωνίες έχουν τις πλευρές τους παράλληλες ή κάθετες μία προς μία τότε

- αν είναι και οι δύο οξείες ή αμβλείες τότε είναι **ίσες**.
- αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία τότε είναι **παραπληρωματικές**.

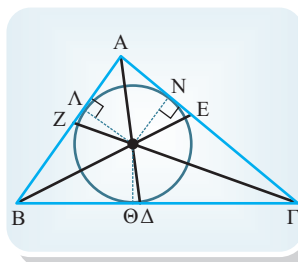


Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου.

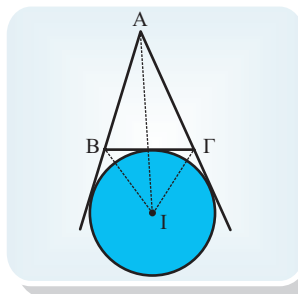
- Ο κύκλος που διέρχεται από τις τρεις κορυφές ενός τριγώνου λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** και το κέντρο του είναι το σημείο όπου διέρχονται και οι τρεις μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου και λέγεται **περίκεντρο**.



- Ο κύκλος που εφάπτεται στις τρεις πλευρές ενός τριγώνου λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος** και το κέντρο του είναι το σημείο όπου διέρχονται και οι τρεις διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου και λέγεται **έκκεντρο**.



- Ο κύκλος που εφάπτεται στη μία πλευρά ενός τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων λέγεται **παρεγγεγραμμένος κύκλος** και το κέντρο του είναι το σημείο όπου διέρχονται η διχοτόμος της απέναντι γωνίας και οι διχοτόμοι των άλλων δύο εξωτερικών γωνιών του τριγώνου και λέγεται **παράκεντρο**.



Άθροισμα γωνιών τριγώνου και κυρτού ν-γώνου.

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές.

Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου ισούται με $2n - 4$ ορθές.

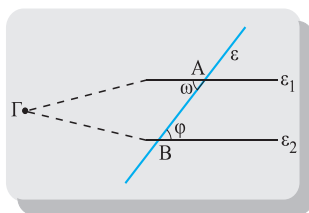
Πορίσματα

- Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών.
- Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες μία προς μία ίσες, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.
- Οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.
- Κάθε γωνία ενός ισόπλευρου τριγώνου ισούται με 60° .
- Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου ισούται με 4 ορθές.



Θεώρημα

Αν δύο ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

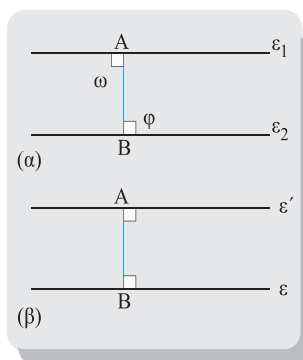


Απόδειξη

Έστω ότι $\omega = \varphi$. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται σε σημείο Γ, η εξωτερική γωνία φ του τριγώνου ABΓ θα είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία ω , που είναι άτοπο.

Άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.



Απόδειξη

Πράγματι οι γωνίες ω και φ (σχ. α) είναι ορθές, οπότε $\omega = \varphi$. Άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

• Θα εξετάσουμε τώρα αν από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε παράλληλες ευθείες προς αυτή και πόσες.

Έστω λοιπόν, ευθεία ε και σημείο A εκτός αυτής (σχ. β). Φέρουμε την $AB \perp \varepsilon$ και ονομάζουμε ε' την ευθεία που είναι κάθετη στην AB στο σημείο A. Τότε $\varepsilon' // \varepsilon$ (αφού και οι δύο είναι κάθετες στην AB).

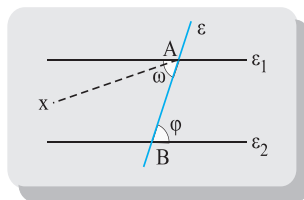
Έτσι λοιπόν **υπάρχει** ευθεία ε' που διέρχεται από ένα σημείο A που δεν ανήκει στην ε και είναι παράλληλη προς την ευθεία ε .

Πρόταση

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

Απόδειξη

Έστω ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και ε μια τέμνουσα. Θα αποδείξουμε ότι $\omega = \varphi$. Αν οι γωνίες ω και φ δεν είναι ίσες, φέρουμε την Ax ώστε οι γωνίες $\angle xAB$ και φ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ε και να είναι ίσες. Τότε $Ax // \varepsilon_2$ γιατί τεμνόμενες από την AB σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες. Κατά συνέπεια υπάρχουν δύο παράλληλες από το A προς την ε_2 , που είναι άτοπο. Άρα $\omega = \varphi$.

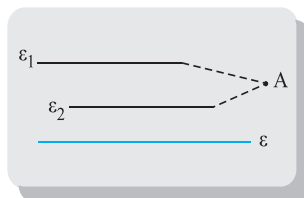


Πρόταση

Αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε , τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $\varepsilon_1 // \varepsilon$ και $\varepsilon_2 // \varepsilon$, τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Απόδειξη

Αν οι ε_1 και ε_2 τέμνονταν σε σημείο A , θα είχαμε από το A δύο παράλληλες προς την ε , που είναι άτοπο. Άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

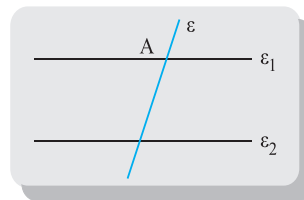


Πρόταση

Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ε θα τέμνει και την άλλη.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η ε τέμνει την ε_1 στο A . Αν η ε δεν έτεμνε την ε_2 , θα ήταν $\varepsilon // \varepsilon_2$ και έτσι θα είχαμε από το A δύο παράλληλες προς την ε_2 , πράγμα αδύνατο. Άρα η ε τέμνει την ε_2 .

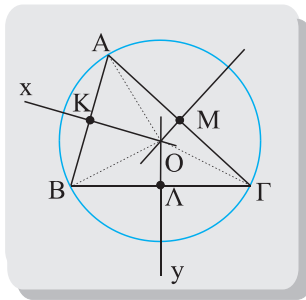


Θεώρημα

Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και K, Λ, M τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Οι μεσοκάθετοι Kx και Λy των $AB, B\Gamma$ θα τέμνονται σε σημείο O , αφού τέμνονται οι κάθετες ευθείες τους AB και $B\Gamma$. Το O ισαπέχει από τις κορυφές A και B αφού ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς AB , δηλαδή $OA=OB$. Επίσης $OB=OG$, αφού το O ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς $B\Gamma$. Επομένως ισχύει ότι $OA=OG$, οπότε το O θα ανήκει και στη μεσοκάθετο της $A\Gamma$. Άρα, ο κύκλος (O, OA) θα διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου.

**Θεώρημα**

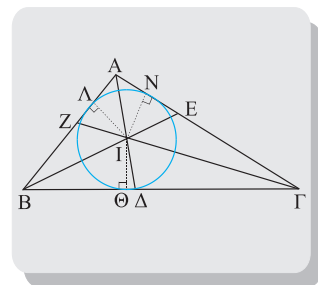
Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι διχοτόμοι BE και ΓZ των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Οι BE και ΓZ τέμνονται σε σημείο I αφού $\hat{E}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{Z}\hat{\Gamma}\hat{B} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} < \hat{B} + \hat{\Gamma} < 2\angle$.

Το I ως σημείο της διχοτόμου της $\hat{B}$ θα ισαπέχει από τις πλευρές της BA και $B\Gamma$, δηλαδή $IA = IO$. Ανάλογα το I θα ισαπέχει από τις πλευρές της $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $IO = IN$. Επομένως το I ισαπέχει από τις AB και $A\Gamma$ και θα ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$.

Τελικά, το I είναι το σημείο τομής και των τριών διχοτόμων του τριγώνου. Με κέντρο το I και ακτίνα την κοινή απόσταση του I από τις πλευρές του $AB\Gamma$, γράφεται κύκλος που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.



Θεώρημα

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

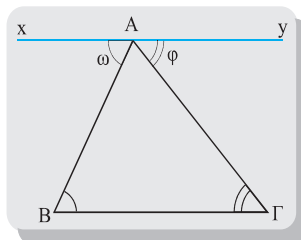
Απόδειξη

Από μια κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία $xy \parallel B\Gamma$. Τότε $\omega = \hat{B}$ (1) και $\varphi = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και $B\Gamma$ με τέμνουσες AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Αλλά $\omega + \hat{A} + \varphi = 2L$ (3).

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2L.$$

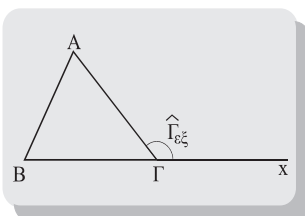


i) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

ii) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

iii) Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.

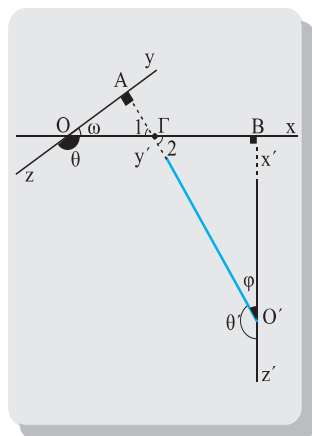
iv) Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60°.

**Απόδειξη**

i) Έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2L$ και $\hat{\Gamma}_{\epsilon_x} + \hat{\Gamma} = 2L$, οπότε

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_{\epsilon_x} + \hat{\Gamma} \quad \text{ή} \quad \hat{\Gamma}_{\epsilon_x} = \hat{A} + \hat{B}.$$

ii) – iv) Προφανή.

**Θεώρημα**

Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω οι γωνίες $x\hat{O}y = \omega$ και $x'\hat{O}'y' = \varphi$ με $Ox \perp O'x'$ και $Oy \perp O'y'$.

Τα τρίγωνα OAG και $O'B'G$ έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 1L$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (κατακορυφήν).

Άρα θα έχουν και τις άλλες γωνίες ίσες, οπότε $\omega = \varphi$.

i) Δύο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

ii) Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές.

Απόδειξη

i) Πράγματι, (σχ. 20) είναι $\theta + \omega = 2L$, $\theta' + \varphi = 2L$, οπότε $\theta = \theta'$, αφού $\omega = \varphi$.

ii) Πράγματι, (σχ.20) είναι $\theta + \omega = 2L$, οπότε $\theta + \varphi = 2L$, αφού $\omega = \varphi$.

i) Το άθροισμα των γωνιών κυρτού n -γώνου να είναι $2n-4$ ορθές.

ii) Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού n -γώνου είναι 4 ορθές.

Απόδειξη

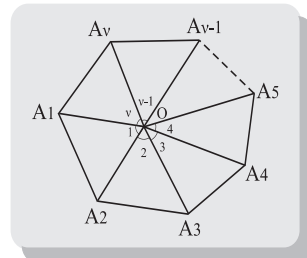
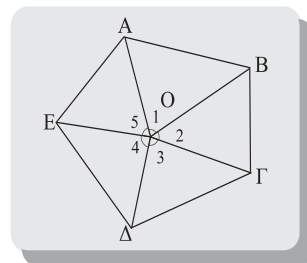
i)

Ας θεωρήσουμε κυρτό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και Ο τυχαίο εσωτερικό σημείο του. Αν ενώσουμε το Ο με τις κορυφές του πενταγώνου, σχηματίζονται πέντε τρίγωνα. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές. Έτσι το άθροισμα των γωνιών και των πέντε τριγώνων είναι $(2 \cdot 5)$ ορθές. Αν αφαιρέσουμε το άθροισμα των γωνιών $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 + \hat{O}_5 = 4$ ορθές, θα μείνει το άθροισμα των γωνιών του πενταγώνου, δηλαδή:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = (2 \cdot 5 - 4) \text{ ορθές.}$$

Όμοια, αν το κυρτό πολύγωνο έχει n πλευρές και ενώσουμε το Ο με τις κορυφές του σχηματίζονται n τρίγωνα. Το άθροισμα των γωνιών των n τριγώνων είναι $2n$ ορθές. Αν αφαιρέσουμε το άθροισμα των γωνιών $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \dots + \hat{O}_n = 4$ ορθές έχουμε:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \dots + \hat{A}_n = (2n - 4) \text{ ορθές.}$$



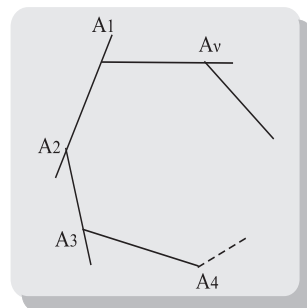
ii)

$$\text{Έχουμε } \begin{cases} \hat{A}_{1e\xi} + \hat{A}_1 = 2L \\ \hat{A}_{2e\xi} + \hat{A}_2 = 2L \\ \dots \dots \dots = \dots \\ \hat{A}_{ve\xi} + \hat{A}_v = 2L \end{cases} \text{ προσθέτουμε κατά μέλη οπότε:}$$

$$(\hat{A}_{1e\xi} + \hat{A}_{2e\xi} + \dots + \hat{A}_{ve\xi}) + (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \dots + \hat{A}_v) = 2nL \text{ ή}$$

$$(\hat{A}_{1e\xi} + \hat{A}_{2e\xi} + \dots + \hat{A}_{ve\xi}) + (2n - 4)L = 2nL \text{ ή}$$

$$\hat{A}_{1e\xi} + \hat{A}_{2e\xi} + \dots + \hat{A}_{ve\xi} = 4L.$$





A. Από το σχολικό βιβλίο

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.

σ. 82: Ασκήσεις Εμπέδωσης 2, 3, 4, 5

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1, 2, 4, 5

Σύνθετα Θέματα 3, 4

σ. 87: Ασκήσεις Εμπέδωσης 1, 3, 5, 6, 7

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Σύνθετα Θέματα 2, 5, 6

σ. 88: Γενικές Ασκήσεις 3, 4

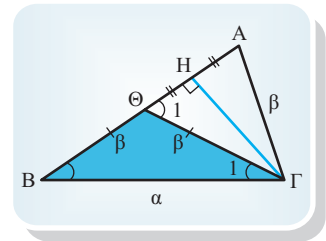


1. Σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $\hat{A} = 2\hat{B}$, να δείξετε ότι $\alpha < 2\beta$

Λύση:

Φέρουμε $\Gamma H \perp AB$ και στο ευθύγραμμο τμήμα BH

παίρνουμε τμήμα $H\Theta = HA$. Τότε το τρίγωνο $\triangle A\Theta\Gamma$ είναι ισοσκελές αφού το ΓH είναι ύψος και διάμεσος. Άρα $\hat{\Theta}_1 = \hat{A}$ σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου, και $\Gamma\Theta = \Gamma\Gamma = \beta$. Όμως η $\hat{\Theta}_1$



είναι εξωτερική γωνία του $\triangle B\Theta\Gamma$, οπότε:

$\hat{\Theta}_1 = \hat{B} + \hat{\Gamma}_1 \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}_1 \Leftrightarrow 2\hat{B} = \hat{B} + \hat{\Gamma}_1 \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}_1$, δηλαδή το $\triangle B\Theta\Gamma$ είναι ισοσκελές με κορυφή Θ , αφού οι προσκείμενες γωνίες στην $B\Gamma$ είναι ίσες. Άρα $\Theta B = \Theta\Gamma = \beta$.

Εφαρμόζουμε την τριγ. ανισότητα στο $\triangle B\Theta\Gamma$ και έχουμε:

$$B\Gamma < \Theta B + \Theta\Gamma \Leftrightarrow \alpha < \beta + \beta \Leftrightarrow \alpha < 2\beta$$

2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1^\circ$) φέρουμε το ύψος AH και τις διχοτόμους AD και GE των γωνιών $\hat{B}\hat{A}H$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Αν το σημείο τομής των AD και GE είναι το P , να δείξετε ότι:

α. $AD \perp GE$ β. $AP = PD$

Λύση:

α. Είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{B}\hat{A}H}{2}$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$. Όμως $\hat{B}\hat{A}H = \hat{\Gamma}$ σαν οξείες γωνίες με

πλευρές κάθετες. Άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{\Gamma}_1 = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$. Στο τρίγωνο $\triangle AP\Gamma$ έχουμε:

$$\widehat{P\hat{A}\Gamma} + \widehat{A\hat{\Gamma}P} = (\widehat{A_2} + \widehat{A_3}) + \widehat{\Gamma_1} = \widehat{A_2} + \widehat{A_3} + \widehat{A_1} = \widehat{A} = 1^\circ$$

$$\text{οπότε } \widehat{A\hat{P}\Gamma} = 2^\circ - (\widehat{P\hat{A}\Gamma} + \widehat{A\hat{\Gamma}P}) = 1^\circ,$$

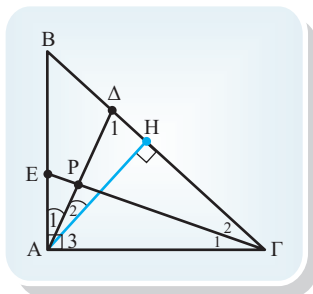
δηλαδή $AD \perp GE$

β. Από το τρίγωνο $\triangle A\hat{H}\Delta$ ($\widehat{H} = 1^\circ$) έχουμε:

$$\widehat{A_2} + \widehat{\Delta_1} = 1^\circ \Leftrightarrow \widehat{A_1} + \widehat{\Delta_1} = 1^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} - \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} + \widehat{\Delta_1} = 1^\circ \Leftrightarrow$$

$$1^\circ - \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} + \widehat{\Delta_1} = 1^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta_1} - \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta\hat{A}\Gamma}$$

Άρα το $\triangle A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Γ , αφού οι προσκείμενες γωνίες στην AD είναι ίσες. Συνεπώς το ύψος ΓP που αντιστοιχεί στην βάση του AD είναι και διάμεσος. Δηλαδή $AP = PD$.



3. Σε ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\hat{\Gamma}$ ($AB = A\hat{\Gamma}$) φέρουμε ημιευθεία $Bx \perp B\hat{\Gamma}$, η οποία βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $(B\hat{\Gamma}, A)$. Αν η Bx τέμνει την προέκταση της ΓA στο M και επί της BM πάρουμε σημεία K, Λ τέτοια ώστε: $\widehat{B\hat{A}\Lambda} = \widehat{\Gamma\hat{A}K} = 90^\circ$, να δείξετε ότι: $BL = KM$ και ότι το $\triangle AK\hat{\Lambda}$ είναι ισοσκελές.

Λύση:

Επειδή $\triangle AB\hat{\Gamma}$ ισοσκελές είναι $\widehat{B_2} = \widehat{\Gamma}$ σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση του $B\hat{\Gamma}$. Όμως από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle B\hat{\Gamma}M$ ($\widehat{\Gamma\hat{B}M} = 90^\circ$) έχουμε:

$$\widehat{\Gamma} + \widehat{M_1} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B_2} + \widehat{M_1} = \widehat{\Gamma\hat{B}M} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widehat{B_2} + \widehat{M_1} = \widehat{B_1} + \widehat{B_2} \Leftrightarrow \widehat{M_1} = \widehat{B_1}$$

Άρα το $\triangle AB\hat{M}$ είναι ισοσκελές με βάση MB , αφού οι προσκείμενες σ' αυτή γωνίες είναι ίσες.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle B\hat{\Lambda}A$ ($\widehat{B\hat{A}\Lambda} = 90^\circ$) και $\triangle A\hat{K}M$ ($\widehat{K\hat{A}M} = 90^\circ$) έχουν:

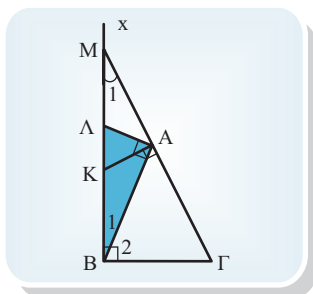
$$(1) AB = AM \quad (\triangle AB\hat{M} \text{ ισοσκελές})$$

$$(2) \widehat{B_1} = \widehat{M_1} \quad (\text{το αποδείξαμε})$$

Άρα $\triangle B\hat{\Lambda}A = \triangle A\hat{K}M$ οπότε:

$$\bullet BL = KM$$

$$\bullet AL = AK, \text{ δηλαδή το } \triangle AK\hat{\Lambda} \text{ είναι ισοσκελές με κορυφή το } A.$$



4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1^\circ$) φέρουμε κάθετη ημιευθεία στην $B\Gamma$ προς το μέρος του A , επί της οποίας παίρνουμε τμήμα $\Gamma K = \Delta\Gamma$. Στην προέκταση της υποτεινούσας ΓB παίρνουμε τμήμα $B\Lambda = AB$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A}\hat{\Gamma}K = 2 \cdot \hat{A}\hat{\Lambda}B$.

Λύση:

- Είναι $AB = B\Lambda$ οπότε το τρίγωνο $AB\Lambda$ είναι ισοσκελές και $\hat{A}_2 = \hat{\Lambda}$. Όμως η $\hat{B}$ είναι εξωτερική του τριγώνου $AB\Lambda$, οπότε

$$\hat{A}_2 + \hat{\Lambda} = \hat{B} \Leftrightarrow 2 \cdot \hat{\Lambda} = \hat{B} \Leftrightarrow \hat{\Lambda} = \frac{\hat{B}}{2}$$

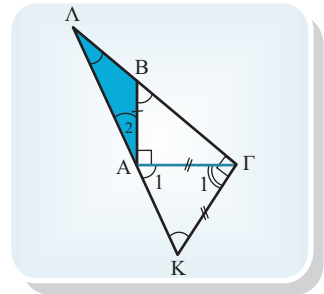
- $\Delta\Gamma = \Gamma K$ άρα $\triangle \Delta\Gamma K$ ισοσκελές, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{K}$. Όμως

$$\hat{\Gamma}_1 + \hat{A}_1 + \hat{K} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ - \hat{\Gamma} + 2 \cdot \hat{A}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 2 \cdot \hat{A}_1 = 90^\circ + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{A}_1 = 45^\circ + \frac{\hat{\Gamma}}{2}$$

- Το $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A , οπότε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$

$$\text{Έχουμε: } \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \left(45^\circ + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \right) + \hat{\Lambda} = 45^\circ + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = 45^\circ + \frac{\hat{\Gamma} + \hat{B}}{2} = 45^\circ + \frac{90^\circ}{2} = 90^\circ$$

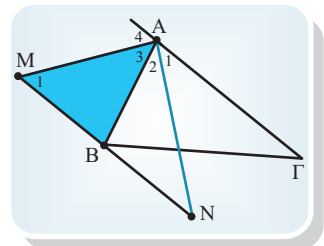
$$\begin{aligned} \text{Οπότε από το } \triangle \Delta\Gamma K \text{ έχουμε: } \hat{\Gamma}_1 &= 180^\circ - 2 \cdot \hat{A}_1 \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ - 2 \cdot (90^\circ - \hat{A}_2) \Leftrightarrow \\ \hat{\Gamma}_1 &= 180^\circ - 180^\circ + 2 \cdot \hat{A}_2 \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 2 \cdot \hat{A}_2 \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Gamma}K = 2 \cdot \hat{\Lambda} \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Gamma}K = 2 \cdot \hat{A}\hat{\Lambda}B \end{aligned}$$



5. Σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$, φέρουμε από την κορυφή B ευθεία $\chi'\chi // \Delta\Gamma$. Επί της $\chi'\chi$ και εκατέρωθεν του B παίρνουμε τμήματα $BM = BN = AB$. Να δείξετε ότι: $AM \perp AN$

Λύση:

- $AB = MB$ άρα το τρίγωνο $\triangle ABM$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{A}_3 = \hat{M}_1$ σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση του.
- Όμως $\hat{A}_4 = \hat{M}_1$ σαν εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων $\Delta\Gamma$ και $\chi'\chi$ που τέμνονται από την AM . Άρα $\hat{A}_3 = \hat{A}_4$, δηλαδή η AM είναι διχοτόμος της $\hat{A}_{εξ}$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι η AN είναι διχοτόμος της



$\hat{A}$. Όμως οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{A}_{εξ}$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές. Άρα οι διχοτόμοι τους είναι κάθετες, δηλαδή $AM \perp AN$.

6. Στην προέκταση της υποτεινούσας ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου

$\triangle AB\Gamma (\hat{A} = 90^\circ)$ παίρνουμε τμήμα $\Gamma K = \gamma$. Φέρουμε ημιευθεία $Kx \perp BK$ προς το μέρος του Α. Επί της Kx παίρνουμε τμήμα $ΚΛ = \beta$. Να δείξετε ότι η ΒΛ διχοτομεί την $\hat{B}$.

Λύση:

Φέρουμε την ΓΛ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$

και $\triangle K\Gamma\Lambda$. Αυτά έχουν:

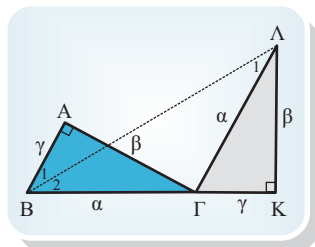
- $\hat{A} = \hat{K} = 90^\circ$
- $AB = K\Gamma = \gamma$ (υπόθεση)
- $ΑΓ = ΚΛ = \beta$ (υπόθεση)

Άρα $\triangle AB\Gamma = \triangle K\Gamma\Lambda$, οπότε $B\Gamma = \Gamma\Lambda$, δηλαδή το τρί-

γωνο $\triangle B\Gamma\Lambda$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Γ. Συνεπώς $\hat{B}_2 = \hat{\Lambda}_1$ σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση του.

Επίσης από την ισότητα των τριγώνων έχουμε $\triangle AB\Gamma = \triangle K\Gamma\Lambda$. Άρα $AB \parallel \Gamma\Lambda$, αφού τεμνόμενες από τη ΒΚ, σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους ίσες.

Οπότε $\hat{B}_1 = \hat{\Lambda}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ και ΓΛ που τέμνονται από την ΒΛ. Συνεπώς $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, δηλαδή η ΒΛ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.



7. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με μικρότερη πλευρά τη ΒΓ. Στις πλευρές του ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΒΔ = ΓΕ = ΒΓ$.

Αν οι ΒΕ, ΓΔ τέμνονται στο Ζ, να δείξετε ότι: $\angle Z = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$

Λύση:

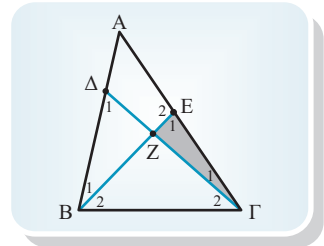
- $B\Delta = B\Gamma$ άρα το τρίγωνο $\triangle B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. Επομένως $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_2 = \frac{180^\circ - \hat{B}}{2}$

• $ΓΕ = ΒΓ$ άρα το τρίγωνο $Β\hat{\Gamma}Ε$ είναι ισοσκελές.

$$\text{Επομένως } \hat{E}_1 = \hat{B}_2 = \frac{180^\circ - \hat{\Gamma}}{2}$$

Από το $Γ\hat{E}Z$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \Gamma\hat{Z}E &= 180^\circ - \hat{E}_1 - \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ - \frac{180^\circ - \hat{\Gamma}}{2} - (\hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_2) = \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}\right) - \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_2 = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{\Gamma} + \frac{180^\circ - \hat{B}}{2} = \\ &= 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \left(90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}\right) = 180^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \end{aligned}$$

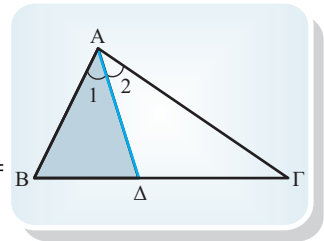


8. Σε τρίγωνο $Α\hat{B}\Gamma$ με $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 30^\circ$, φέρουμε την διχοτόμο $ΑΔ$. Να δείξετε ότι $Α\hat{\Delta}Β = 75^\circ$.

Λύση:

Από το $Α\hat{\Delta}Β$ έχουμε:

$$\begin{aligned} Α\hat{\Delta}Β &= 180^\circ - \hat{A}_1 - \hat{B} = 180^\circ - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{B} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} - \frac{\hat{A}}{2} - \hat{B} = \\ &= \frac{\hat{A}}{2} + \hat{\Gamma} = \frac{\hat{A} + 2\hat{\Gamma}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{B} - \hat{\Gamma} + 2\hat{\Gamma}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} = \\ &= \frac{180^\circ - (\hat{B} - \hat{\Gamma})}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ \end{aligned}$$



9. Από το μέσο $Μ$ της βάσης $ΒΓ$ ισοσκελούς τριγώνου $Α\hat{B}\Gamma$, φέρουμε παράλληλες στις $ΑΒ$, $ΑΓ$ που τις τέμνουν στα σημεία $Δ$, $Ε$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι η $ΑΜ$ είναι μεσοκάθετος του $ΔΕ$.

Λύση:

Επειδή $Α\hat{B}\Gamma$ ισοσκελές, ισχύει $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση του.

Επίσης $\hat{B} = \hat{M}_2$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων AB και ME που τέμνονται από την BG .

Ομοίως $\hat{\Gamma} = \hat{M}_1$.

Άρα:

- $\hat{B} = \hat{M}_1$, οπότε $\triangle B\hat{M}$ ισοσκελές, αφού οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του είναι ίσες. Συνεπώς $DB = DM$ (1)
- $\hat{\Gamma} = \hat{M}_2$ οπότε ομοίως συμπεραίνουμε ότι $EM = EG$ (2)

Τα $\triangle B\hat{M}$ και $\triangle EM\hat{\Gamma}$ έχουν:

1. $BM = MG$ (M μέσο BG)
2. $\hat{B} = \hat{M}_2$ (το αποδείξαμε παραπάνω)
3. $\hat{M}_1 = \hat{\Gamma}$ (το αποδείξαμε παραπάνω)

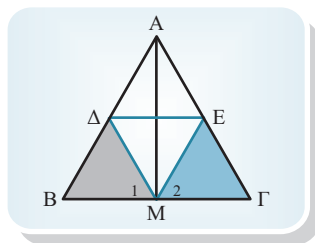
Άρα $\triangle B\hat{M} = \triangle EM\hat{\Gamma}$ (ΓΠΓ) οπότε $DB = EM$ (3)

Από (1), (2), (3) συμπεραίνουμε ότι $DB = DM = ME = EG$

Επειδή $MD = ME$, το M ανήκει στην μεσοκάθετο του DE , αφού ισαπέχει από τα άκρα του.

Επίσης $AD = AB - DB = AG - EG = AE$.

Άρα και το A ισαπέχει από τα άκρα του DE , οπότε ανήκει στην μεσοκάθετο του. Συνεπώς η AM είναι μεσοκάθετος του DE .

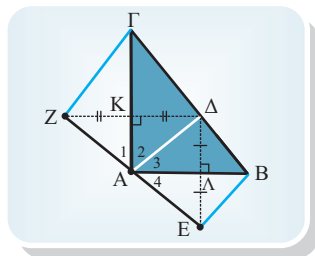


10. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε το ύψος AD προς την υποτίπουσα $B\Gamma$. Έστω E, Z τα συμμετρικά του A ως προς τις ευθείες AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

- α. τα σημεία E, A, Z είναι συνευθειακά.**
- β. $BE \parallel Z\Gamma$**

Λύση:

- α.** Το τρίγωνο $A\hat{D}Z$ είναι ισοσκελές, αφού η AK είναι ύψος και διάμεσος. Άρα $AD = AZ$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $AD = AE$. Στα ισοσκελή τρίγωνα $A\hat{D}Z$ και $A\hat{D}E$ οι AK, AL αντίστοιχα θα είναι και διχοτόμοι, οπότε: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και



$$\hat{A}_3 = \hat{A}_4. \text{ Τότε } Z\hat{A}E = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = \hat{A}_2 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_3 = 2 \cdot \hat{A}_2 + 2 \cdot \hat{A}_3 = \\ = 2(\hat{A}_2 + \hat{A}_3) = 2 \cdot \hat{A} = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$$

Συνεπώς τα Z, A, E είναι συνευθειακά σημεία.

- β. Είναι $\hat{A}\hat{E}B = \hat{A}\hat{D}B = 90^\circ$ σαν συμμετρικές γωνίες ως προς AB, οπότε $BE \perp AE$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\Gamma Z \perp AZ$. Όμως τα AE και AZ έχουν κοινό φορέα. Άρα $BE // \Gamma Z$ σαν κάθετα στην ίδια ευθεία.



1. Στη γωνία $\hat{xO\psi}$ η Oz είναι εσωτερική ευθεία. Από τυχαίο σημείο A της Oz φέρνουμε την $AB \parallel O\chi$. Ναδειχθεί ότι:

- α. Αν η Oz είναι διχοτόμος της $\hat{xO\psi}$, το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές
 β. Αν το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές, η Oz είναι διχοτόμος της $\hat{xO\psi}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και AH η διχοτόμος της $\hat{A}$. Φέρνουμε $B\Delta$ παράλληλη στη διχοτόμο, που τέμνει την ευθεία GA στο Δ . Ναδειχθεί ότι:

- α. Το τρίγωνο $B\Delta\Delta$ ισοσκελές
 β. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τότε $\Delta B \perp B\Gamma$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, φέρνουμε τις διαμέσους BB' , $\Gamma\Gamma'$ και μια ευθεία ε παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ που τέμνει τις διαμέσους στα σημεία K , Λ αντίστοιχα και τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία M και N . Να δείξετε ότι $KM = \Lambda N$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A\Gamma > AB$. Στην πλευρά $A\Gamma$ παίρνουμε τμήμα $\Lambda\Delta = AB$. Να δειχθεί ότι:

α. $\widehat{B\Lambda\Gamma} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$

β. $\Delta\widehat{B\Gamma} = \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ και E της $B\Gamma$ ώστε $B\widehat{A\Delta} = \widehat{\Gamma}$ και $\Gamma\widehat{A E} = \widehat{B}$. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου $\Lambda\Delta E$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις πλευρές του AB και $B\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ και E τέτοια, ώστε να είναι $A\Delta = AE$. Να αποδείξετε ότι: $\hat{E}\hat{A}\hat{\Gamma} = 2 \cdot \hat{B}\hat{E}\hat{\Delta}$.

.....

.....

.....

.....

.....

7. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι διχοτόμοι $A\Delta$ και ΓE . Αν είναι $A\Delta = AB$ και $\Gamma E = B\Gamma$ να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

.....

.....

.....

.....

.....

8. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} < 2\hat{\Gamma}$. Έστω τα σημεία Δ και E της AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = \hat{E}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = \frac{\hat{A}}{2}$. Να δείξετε ότι $\Delta A = \Delta E = E\Gamma$.

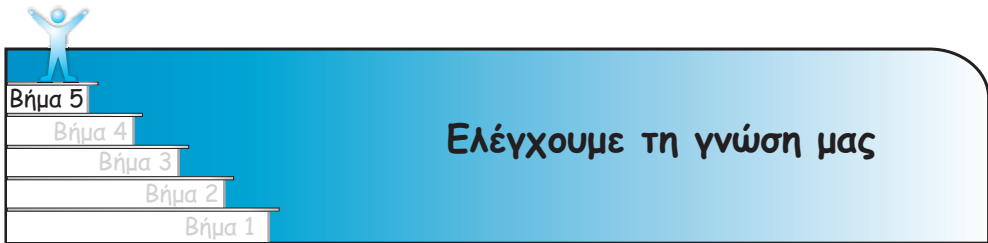
.....

.....

.....

.....

.....

**Θέμα 1^ο**

- A. Να δείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι δύο ορθές
(Μονάδες 10)
- B. Να δείξετε ότι κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.
(Μονάδες 10)
- Γ. Να δείξετε ότι αν δύο ευθείες ε_1 , ε_2 είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε τέμνει τη μία από αυτές θα τέμνει και την άλλη.
(Μονάδες 5)

Θέμα 2^ο

- A. Το σημείο Γ είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB. Από το Γ φέρνουμε τυχαία ημιευθεία Γχ και παίρνουμε σε αυτήν τμήματα ΓΔ = ΓΑ και ΓΕ = ΓΒ. Να δείξετε ότι $BE \perp AD$.
(Μονάδες 12)
- B. Το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο Α. Στις προεκτάσεις των ΒΑ και ΓΑ προς το μέρος της κορυφής Α παίρνουμε τμήματα $AB' = AG$ και $AG' = AB$. Να δείξετε ότι η προέκταση του ύψους ΑΔ περνάει από το μέσο Ο της Β'Γ'.
(Μονάδες 13)

Θέμα 3^ο

- A. Να αποδειχθεί ότι οι διχοτόμοι των γωνιών κυρτού τετραπλεύρου, όταν τέμνονται ανά δύο, σχηματίζουν τετράπλευρο με απέναντι γωνίες παραπληρωματικές.
(Μονάδες 17)
- B. Σε τετράπλευρο ABΓΔ είναι $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{D}$ είναι παράλληλες.
(Μονάδες 8)

Θέμα 4^ο

- A. Στο τρίγωνο ABΓ είναι $AG > AB$. Φέρνουμε το ύψος ΑΗ, τη διχοτόμο ΑΔ και τη

διάμεσο AM. Να δειχθούν οι σχέσεις:

α. $AH < \frac{AB + AG}{2}$ β. $\hat{BAH} < \hat{GAH}$ γ. $\Delta B < \Delta \Gamma$ δ. $\Delta B < AB$

(Μονάδες 16)

B. Στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ φέρνουμε τη ΒΔ διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}\hat{D}B$, $\hat{B}\hat{A}\Gamma$ τέμνουν τη ΒΓ στα Ζ, Ε να δείξετε ότι $EZ = 2BD$.

(Μονάδες 9)

Κεφάλαιο 5°

Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία

Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο 5 θα πρέπει να είναι σε θέση:

- ✓ Να γνωρίζει τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου, ορθογωνίου, ρόμβου, τετραγώνου, τραπέζιου.
- ✓ Να γνωρίζει τα κριτήρια, τι πρέπει δηλαδή να ισχύει για να είναι ένα τετράπλευρο κάποιο από τα προαναφερθέντα σχήματα.
- ✓ Να γνωρίζει και να εφαρμόζει την ιδιότητα που έχει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου.
- ✓ Να γνωρίζει τα σημαντικά κέντρα ενός τριγώνου, το ορθόκεντρο, το βαρύκεντρο και τις ιδιότητες του.
- ✓ Να γνωρίζει και να εφαρμόζει την ιδιότητα της διαμέσου ενός ορθογωνίου τριγώνου και τις διάφορες προτάσεις που προκύπτουν από αυτήν.

Ορισμός.

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Δηλαδή το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, όταν $AB//\Gamma\Delta$ και $A\Delta//B\Gamma$.

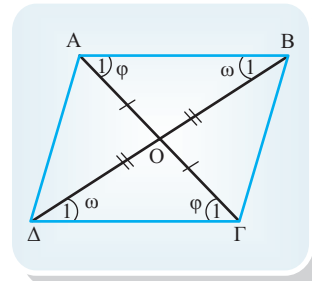
• Ιδιότητες παραλληλογράμμων

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- i. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- ii. Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- iii. Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

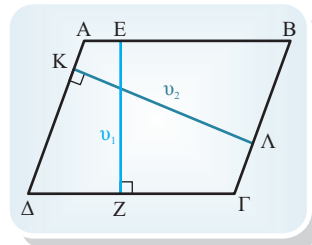
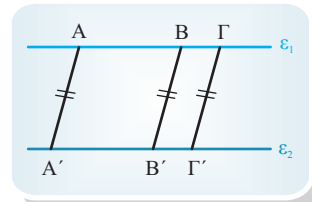
Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.

Για το λόγο αυτό λέγεται **κέντρο** του παραλληλογράμμου.

**Πόρισμα**

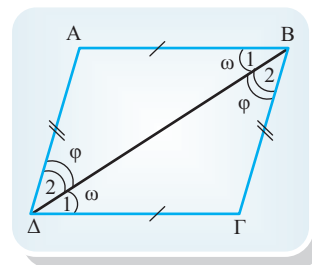
Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα.

Αν τα τμήματα είναι κάθετα στις παράλληλες, το κοινό μήκος τους λέγεται **απόσταση** των παραλλήλων. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται **ύψος** του παραλληλογράμμου, ενώ οι απέναντι πλευρές του λέγονται **βάσεις** ως προς αυτό το ύψος.

**• Κριτήρια για παραλληλόγραμμο**

Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

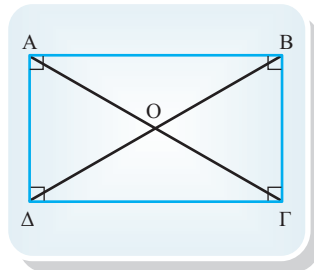
- i. Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.
- ii. Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
- iii. Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.
- iv. Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.



Ορθογώνιο.**Ορισμός.**

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μια γωνία ορθή.

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, ενώ δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), προκύπτει ότι όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές.

**• Ιδιότητες ορθογωνίου**

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

• Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο

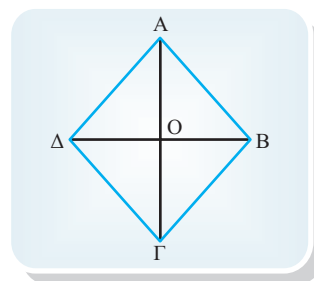
Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.
- ii. Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
- iii. Έχει τρεις γωνίες ορθές.
- iv. Όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

Ρόμβος.**Ορισμός.**

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες προκύπτει ότι όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες.

**• Ιδιότητες του ρόμβου.**

- i. Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
- ii. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

• Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος.

Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- ii. Είναι παραλληλόγραμμο και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.

- iii. Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- iv. Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.

• **Οι διαγώνιοι του ρόμβου:**

- α. διχοτομούνται
- β. τέμνονται κάθετα
- γ. διχοτομούν τις γωνίες
- δ. είναι άξονες συμμετρίας

Τετράγωνο.

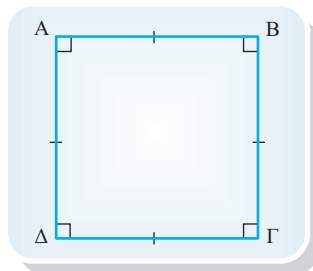
Ορισμός.

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

• **Ιδιότητες του τετραγώνου.**

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου και όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. Επομένως, σε κάθε τετράγωνο:

- i. Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
- ii. Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
- iii. Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
- iv. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του.



• **Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο.**

Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Αποδεικνύεται ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- ii. Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
- iii. Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
- iv. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- v. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

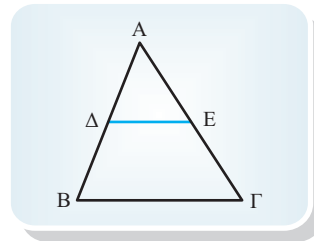
Εφαρμογές στα τρίγωνα.

Θεώρημα I Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

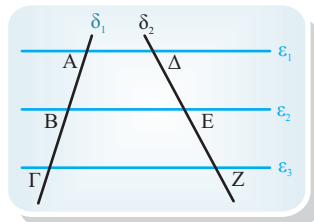
Στο παρακάτω σχήμα αν Δ, Ε είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοι-

$$\text{χα, τότε } \Delta\text{Ε} // \frac{\text{ΒΓ}}{2}$$

Θεώρημα II Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.



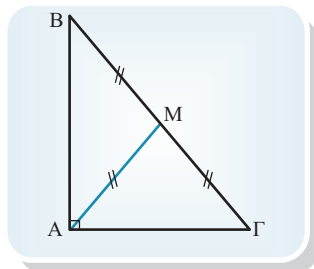
Θεώρημα III Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μια ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.



Αν $AB = B\Gamma$ τότε $\Delta E = EZ$

Μια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου

Θεώρημα I Η διαμέσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.



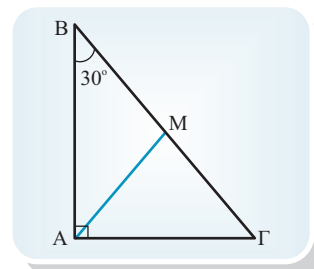
Αν AM διάμεσος τότε $AM = \frac{B\Gamma}{2}$

Θεώρημα II Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

Πόρισμα.

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

Αν $\hat{B} = 30^\circ$ τότε $AG = \frac{B\Gamma}{2}$ και αντίστροφα.

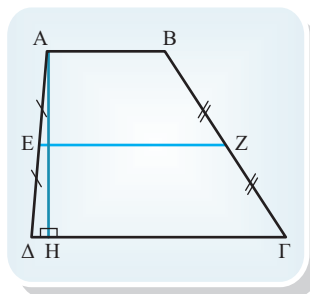


Τραπεζίο

Ορισμός:

Τραπεζίο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.

Οι παράλληλες πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ λέγονται **βάσεις** του τραπεζίου. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου με τα άκρα του στους φορείς των βάσεων λέγεται **ύψος** του τραπεζίου. Το ευθύγραμμο τμήμα AZ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίου.



Θεώρημα I

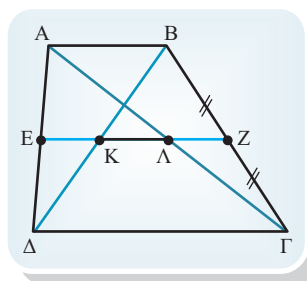
Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμα τους. Δηλαδή, αν EZ διάμεσος του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

i. $EZ \parallel AB, \Gamma\Delta$ και

$$\text{ii. } EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$$

Πόρισμα.

Η διάμεσος EZ τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ διέρχεται από τα μέσα K και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα $K\Lambda$ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεων του.



Ισοσκελές τραπεζίο

Ορισμός:

Ισοσκελές τραπεζίο λέγεται το τραπεζίο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

• Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

Αν ένα τραπεζίο είναι ισοσκελές, τότε:

- i. Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
- ii. Οι διαγωνιοί του είναι ίσες.

• Κριτήρια για να είναι ένα τραπεζίο ισοσκελές

Ένα τραπεζίο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις.

- i. Οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες.
- ii. Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
- iii. Οι διαγωνιοί του είναι ίσες.



Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- (i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- (ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- (iii) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη των i), ii)

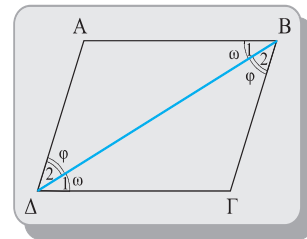
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$ (σχ. 1). Έχουμε:

$$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

$B\Delta$ κοινή πλευρά.

$$\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

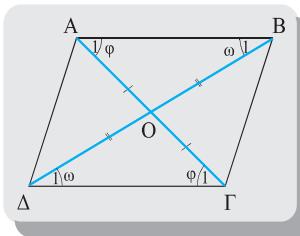
Άρα τα τρίγωνα $AB\Delta$, $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$. Επίσης έχουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi + \omega$.



Σχήμα 1

Απόδειξη της ιδιότητας iii)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAB , $O\Gamma\Delta$. Έχουμε:

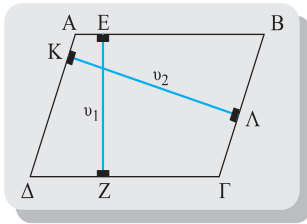


$$AB = \Gamma\Delta$$

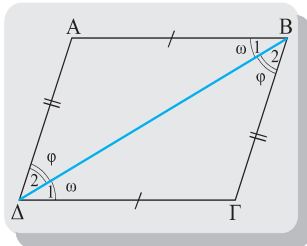
$$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \varphi \text{ (εντός εναλλάξ).}$$

Άρα, τα τρίγωνα OAB , $O\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.
- (ii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
- (iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.
- (iv) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη

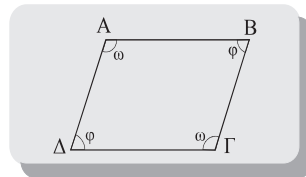
Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Για να αποδείξουμε τα κριτήρια, θα πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό να αποδείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση, οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι παράλληλες.

(i) Έστω $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$ (σχ. 1). Αν φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ, τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ που είναι ίσα, γιατί $AB = \Gamma\Delta$, $A\Delta = B\Gamma$ και ΒΔ κοινή πλευρά. Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$, οπότε $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

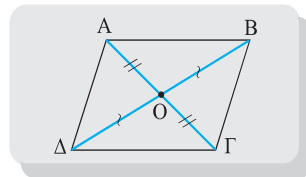
(ii) Έστω $AB \parallel \Gamma\Delta$ (σχ. 2). Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, γιατί $AB = \Gamma\Delta$, $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και η ΒΔ είναι κοινή πλευρά. Επομένως, όμοια με το (i), το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(iii) Αν $\hat{A} = \hat{\Gamma} = \omega$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi$ (σχ. 3) η σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 4\angle$ γράφεται $2\omega + 2\varphi = 4\angle$ ή $\varphi + \omega = 2\angle$. Επομένως, έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2\angle$, οπότε $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\hat{A} + \hat{B} = 2\angle$, οπότε $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(iv) Έστω $AO = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$ (σχ. 4). Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ, καθώς και τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΒΟΓ είναι ίσα. Επομένως, όμοια με το (i), θα είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 3



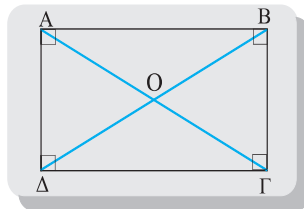
Σχήμα 4

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

Απόδειξη

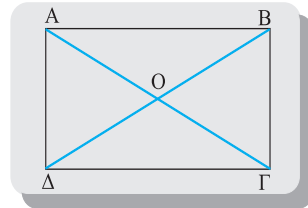
Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο. Θα αποδείξουμε ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, ΑΔ κοινή, ΑΒ = ΔΓ), οπότε ΑΓ = ΒΔ.



Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Είναι **παράλληλόγραμμο** και έχει **μία ορθή γωνία**.
- (ii) Είναι **παράλληλόγραμμο** και οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες**.
- (iii) Έχει **τρεις γωνίες ορθές**.
- (iv) Όλες οι γωνίες του είναι **ίσες**.



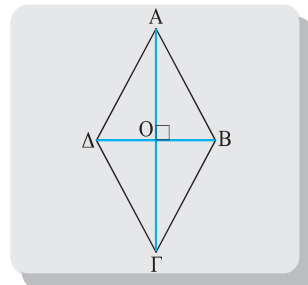
Απόδειξη

- (i) Προκύπτει από τον ορισμό του παραλληλογράμμου.
- (ii) Έστω $ABCD$ παράλληλόγραμμο με $AC = BD$. Τότε τα τρίγωνα ABC και DCB είναι ίσα ($AB = DC$, $AC = BD$, BC κοινή), οπότε $\hat{A} = \hat{D}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{D} = 2\text{L}$, οπότε $\hat{A} = \hat{D} = 1\text{L}$. Επομένως, το $ABCD$ είναι ορθογώνιο.
- (iii) Αν έχει τρεις ορθές γωνίες θα είναι και η άλλη ορθή, αφού το άθροισμα των γωνιών κάθε τετραπλεύρου είναι 4L .
- (iv) Αν όλες οι γωνίες είναι ίσες, προφανώς όλες είναι ορθές.

- (i) Οι **διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα**.
- (ii) Οι **διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του**.

Απόδειξη

Έστω $ABCD$ ρόμβος. Επειδή το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές, η διάμεσος του AO είναι ύψος του και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επομένως $AO \perp BD$ και η AO διχοτομεί την $\hat{A}$. Όμοια η CO διχοτομεί τη $\hat{C}$ και η BO τις $\hat{B}$ και $\hat{D}$.

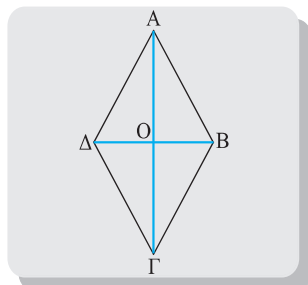


Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

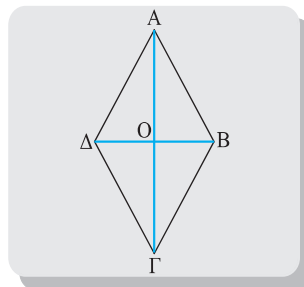
- (i) Έχει **όλες τις πλευρές του ίσες**.
- (ii) Είναι **παράλληλόγραμμο** και **δύο διαδοχικές πλευρές** του είναι **ίσες**.
- (iii) Είναι **παράλληλόγραμμο** και οι διαγώνιοί του τέμνονται **κάθετα**.
- (iv) Είναι **παράλληλόγραμμο** και μία διαγώνίός του **διχοτομεί** μία γωνία του.

Απόδειξη

- (i) και (ii) Προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του ρόμβου.
- (iii) Έστω $ABCD$ παράλληλόγραμμο με $AC \perp BD$.



Στο τρίγωνο $AB\Delta$ η AO είναι διάμεσος, αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Επίσης, η AO είναι και ύψος, επειδή $AG \perp BD$. Άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, οπότε $AB = AD$. Επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.
(iv) Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο και AG διχοτόμος της $\hat{A}$. Τότε πάλι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές (αφού AO διχοτόμος και διάμεσος), οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.



Θεώρημα

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

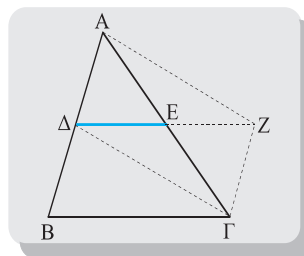
Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E των AB , AG αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι $\Delta E \parallel \frac{B\Gamma}{2}$.

Προεκτείνουμε τη ΔE κατά τμήμα $EZ = \Delta E$. Το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Άρα $A\Delta \parallel \Gamma Z$, οπότε $\Delta B \parallel \Gamma Z$, αφού $A\Delta = \Delta B$. Έτσι το τετράπλευρο $\Delta Z\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

(i) $\Delta Z \parallel B\Gamma$ άρα $\Delta E \parallel B\Gamma$ και

(ii) $\Delta Z = B\Gamma$ ή $2\Delta E = B\Gamma$ ή $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$.



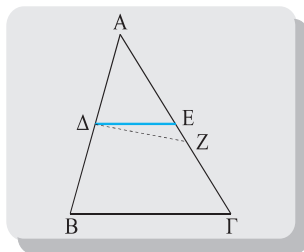
Θεώρημα

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και ας φέρουμε από το μέσο Δ της AB την παράλληλη προς την $B\Gamma$ που τέμνει την AG στο E . Θα αποδείξουμε ότι το E είναι το μέσο της AG .

Έστω ότι το E δεν είναι μέσο της AG . Αν Z είναι το μέσο της AG , το τμήμα ΔZ ενώνει τα μέσα των πλευρών AB και AG , οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα $\Delta Z \parallel B\Gamma$. Έτσι, όμως, έχουμε από το Δ δύο παράλληλες προς τη $B\Gamma$, που είναι άτοπο. Άρα το E είναι μέσο της AG .



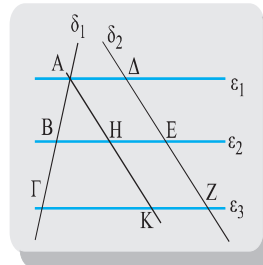
Θεώρημα

Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ οι οποίες τέμνουν την δ_1 στα σημεία A, B, Γ και ορίζουν σε αυτή τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα AB, BΓ (σχ. 1). Αν μια άλλη ευθεία δ_2 τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, θα αποδείξουμε ότι $\Delta E = E Z$.

Φέρουμε $A K \parallel \Delta Z$. Τότε τα τετράπλευρα AΔΕΗ και ΕΖΚΗ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε $A H = \Delta E$ (1) και $H K = E Z$ (2). Στο τρίγωνο ΑΚΓ το Η είναι το μέσο της ΑΓ και $B H \parallel Γ K$. Άρα το Η είναι μέσο της ΑΚ, δηλαδή $A H = H K$ (3). Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\Delta E = E Z$.



σχ. 1

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι μία ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2 , η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες.

Η ευθεία ε λέγεται **μεσοπαράλληλος** των ε_1 και ε_2 .

Απόδειξη

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 και ένα τμήμα $AB = v$ κάθετο προς αυτές, το οποίο έχει τα άκρα του στις ε_1 και ε_2 . Αν από το μέσο Κ της ΑΒ φέρουμε την ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2 , παρατηρούμε ότι κάθε σημείο Μ της ε

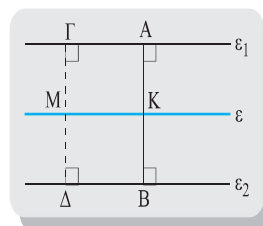
ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2 , αφού $M\Gamma = M\Delta = \frac{v}{2}$.

Αντίστροφα, αν ένα σημείο Μ ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2 ,

το Μ τότε είναι σημείο μεταξύ των παραλλήλων και ισχύει $M\Gamma + M\Delta = \Gamma\Delta = v$, οπότε $M\Gamma = M\Delta = \frac{v}{2}$.

Έτσι τα τετράπλευρα ΜΓΑΚ και ΜΔΒΚ είναι παραλληλόγραμμα ($M\Gamma \parallel AK, M\Delta \parallel KB$), οπότε $MK \parallel \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Επομένως, το Μ ανήκει στην ευθεία ε .

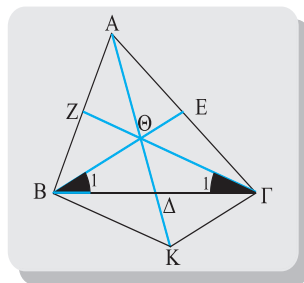


Θεώρημα

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τις δύο διαμέσους ΒΕ και ΓΖ. Επειδή $\hat{B}_1 + \hat{G}_1 < \hat{B} + \hat{G} < 2\angle$, οι δύο διάμεσοι τέμνονται σε ένα εσωτερικό σημείο Θ του τριγώνου. Αν η ΑΘ τέμνει τη ΒΓ στο Δ, θα αποδείξουμε ότι i) η ΑΔ είναι η τρίτη διάμεσος του τριγώνου, δηλαδή ΒΔ = ΔΓ και ii) $A\Theta = \frac{2}{3} A\Delta$.



i) Στην ημιευθεία ΘΔ παίρνουμε τμήμα ΘΚ = ΑΘ. Παρατηρούμε ότι τα σημεία Ε και Θ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΚΓ, οπότε $E\Theta \parallel \frac{ΓΚ}{2}$ (1).

Όμοια από το τρίγωνο ΑΒΚ έχουμε $Z\Theta \parallel \frac{ΒΚ}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΕ // ΓΚ και ΓΖ // ΒΚ, δηλαδή το ΒΘΓΚ είναι παραλληλόγραμμο (3). Άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, οπότε ΒΔ = ΔΓ.

Το σημείο Θ, στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι του ΑΒΓ, λέγεται **βαρύκεντρο** (ή **κέντρο βάρους**) του τριγώνου.

ii) Από το παραλληλόγραμμο ΒΘΓΚ έχουμε ακόμη

$$\Theta\Delta = \Delta\Gamma = \frac{\Theta\Gamma}{2}, \text{ άρα } \Theta\Delta = \frac{A\Theta}{2} \text{ ή } A\Theta = 2\Theta\Delta.$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι

$$E\Theta = \frac{\Gamma\Gamma}{2} = \frac{B\Theta}{2} \text{ ή } B\Theta = 2\Theta E.$$

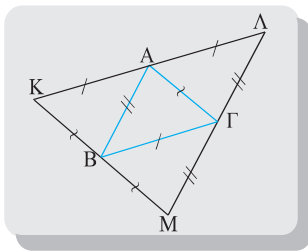
Όμοια από τις (2) και (3) έχουμε $\Gamma\Theta = 2\Theta Z$. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το βαρύκεντρο έχει την ιδιότητα να χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου.

Επίσης έχουμε ότι $A\Delta = A\Theta + \Theta\Delta = 2\Theta\Delta + \Theta\Delta = 3\Theta\Delta$. Άρα

$$\Theta\Delta = \frac{1}{3} A\Delta, \text{ οπότε } A\Theta = \frac{2}{3} A\Delta. \text{ Όμοια προκύπτει ότι } B\Theta = \frac{2}{3} BE \text{ και } \Gamma\Theta = \frac{2}{3} \Gamma Z.$$

Οι παράλληλες, που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.

Απόδειξη



Από τις κορυφές A, B, Γ τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές του, οι οποίες ορίζουν ένα νέο τρίγωνο $K\Lambda M$.

Λόγω των σχηματιζόμενων παραλληλογράμμων $KA\Gamma B$, $\Lambda AB\Gamma$ και $MB\Lambda\Gamma$ έχουμε: $KA = B\Gamma = \Lambda\Lambda$, $\Lambda\Gamma = AB = \Gamma M$ και $KB = A\Gamma = BM$.

Επομένως τα σημεία A, B, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $K\Lambda M$.

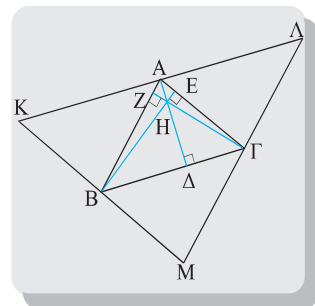
Θεώρημα

Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $A\Delta$, BE και ΓZ . Από τις κορυφές του A, B, Γ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές. Σύμφωνα με το Λήμμα, στο τρίγωνο $K\Lambda M$ τα σημεία A, B, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ευθείες $A\Delta$, BE και ΓZ είναι κάθετες στις $K\Lambda$, KM και $M\Lambda$ αντίστοιχα (αφού είναι κάθετες στις $B\Gamma$, $A\Gamma$ και AB) και μάλιστα είναι κάθετες στα μέσα τους. Δηλαδή οι ευθείες $A\Delta$, BE και ΓZ είναι οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου $K\Lambda M$, οπότε θα διέρχονται από το ίδιο σημείο H .

Το σημείο H λέγεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου $AB\Gamma$.



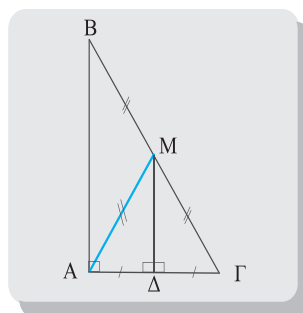
Θεώρημα

Η διάμεσος ορθογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και τη διάμεσό του AM (σχ.30). Θα αποδείξουμε ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

Φέρουμε τη διάμεσο $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$. Το $M\Delta$ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε $M\Delta \parallel AB$. Αλλά $AB \perp A\Gamma$, επομένως και $M\Delta \perp A\Gamma$. Άρα, το $M\Delta$ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο $AM\Gamma$, οπότε $AM = M\Gamma$, δηλαδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

**Θεώρημα**

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

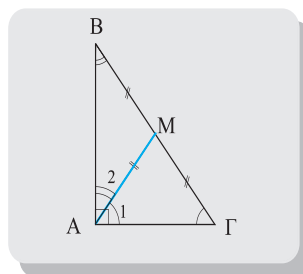
Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τη διάμεσό του AM .

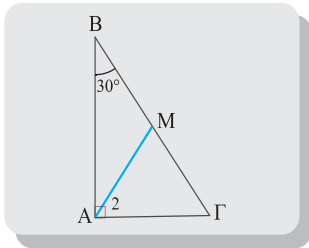
Αν $AM = \frac{B\Gamma}{2}$, θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

Επειδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ έχουμε $AM = M\Gamma$, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (1) και $AM = MB$, οπότε $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\hat{L}$, οπότε $2\hat{A} = 2\hat{L}$ ή $\hat{A} = 1\hat{L}$.



Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

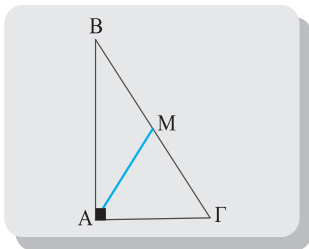


Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$.

Θα αποδείξουμε ότι $AG = \frac{BG}{2}$.

Επειδή $\hat{B} = 30^\circ$, είναι $\hat{\Gamma} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Φέρουμε τη διάμεσο AM και είναι $AM = \frac{BG}{2} = MG$. Έτσι $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισόπλευρο. Επομένως $AG = MG = \frac{BG}{2}$.



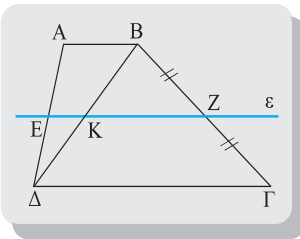
Αντίστροφο

Φέρουμε τη διάμεσο AM , οπότε $AM = \frac{BG}{2} = MG = AG$ (αφού $AG = \frac{BG}{2}$). Άρα το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επομένως $\hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Θεώρημα

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Δηλαδή, αν EZ διάμεσος του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$, τότε: i) $EZ \parallel AB, \Gamma\Delta$ και ii) $EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$.



Απόδειξη

Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), τη διαγώνιο του $B\Delta$ και E το μέσο της AD . Από το E φέρουμε ευθεία ε παράλληλη των AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνει τις $B\Delta$ και $B\Gamma$ στα K και Z αντίστοιχα. Τότε:

Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το E είναι μέσο της AD και $EK \parallel AB$, οπότε το K είναι το μέσο της $B\Delta$ και $EK = \frac{AB}{2}$ (1).

Επίσης στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ το K είναι μέσο της $B\Delta$ και $KZ \parallel \Gamma\Delta$, οπότε το Z είναι το μέσο της $B\Gamma$ και $KZ = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ (2). Επομένως η EZ είναι διάμεσος του τραπεζίου και i) $EZ \parallel AB, \Gamma\Delta$

ii) Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $EK + KZ = \frac{AB}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2}$ ή $EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$.

Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.

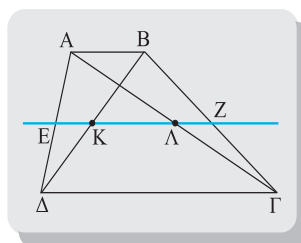
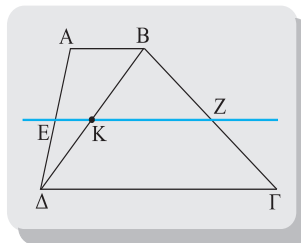
Απόδειξη

Αποδείξαμε παραπάνω ότι το Κ είναι μέσο της ΒΔ. Όμοια, αν φέρουμε την ΑΓ, στο τρίγωνο ΑΔΓ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΛ // ΓΔ, οπότε το Λ είναι μέσο της ΑΓ και

$$ΕΛ = \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad (3).$$

Επομένως, η διάμεσος ΕΖ του τραpezίου διέρχεται από τα μέσα Κ, Λ των διαγωνίων του και προφανώς ΚΛ // ΑΒ, ΓΔ. Επίσης από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

$$ΕΛ - ΕΚ = \frac{\Gamma\Delta}{2} - \frac{ΑΒ}{2} \quad \text{ή} \quad ΚΛ = \frac{\Gamma\Delta - ΑΒ}{2} \quad (\text{με } \Gamma\Delta > ΑΒ).$$



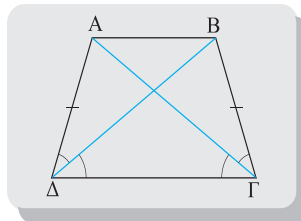
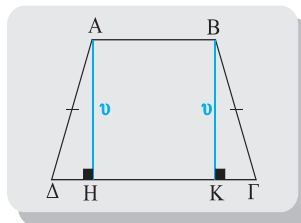
Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:

- (i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
- (ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Απόδειξη

(i) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ). Φέρουμε τα ύψη ΑΗ και ΒΚ. Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΒΚΓ είναι ίσα ($\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$, ΑΔ = ΒΓ και ΑΗ = ΒΚ = υ), οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$. Επειδή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), έχουμε και $\hat{A} = \hat{B}$.

(ii) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ (σχ. 39) είναι ίσα (ΑΔ = ΒΓ, ΓΔ κοινή και $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{G} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{G}$), οπότε ΑΓ = ΒΔ.



**A. Από το σχολικό βιβλίο****ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.**

σ. 99: Ασκήσεις Εμπέδωσης 2, 3, 4

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1,2, 3, 4

Σύνθετα Θέματα 3

σ. 103: Ασκήσεις Εμπέδωσης 2, 3, 4, 5, 6

Αποδεικτικές Ασκήσεις 2

σ. 111: Ασκήσεις Εμπέδωσης όλες

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1,2, 3, 4, 5, 6, 7

Σύνθετα Θέματα 1, 2, 4

σ. 115: Ασκήσεις Εμπέδωσης 3, 4, 5, 6

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1,2, 4, 5, 6, 7, 10

Σύνθετα Θέματα 1, 2, 3



- 1. Δίνεται ρόμβος με διαγώνιες 6cm και 4cm. Να βρείτε την περίμετρο του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών του.**

Λύση:

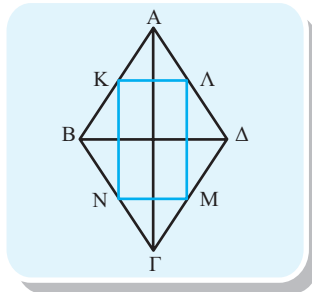
Γνωρίζουμε ότι το τετράπλευρο που σχηματίζεται από τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι παραλληλόγραμμο.

Έχουμε $KN \parallel AG$ και $KL \parallel BD$. Αφού $AG \perp BD$ (διαγώνιοι ρόμβου), θα είναι $KN \perp KL$.

Άρα το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

$$\text{Ακόμα } KN = \frac{AG}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ και } KL = \frac{BD}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Η περίμετρος του ΚΛΜΝ είναι $2KL + 2KN = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10 \text{ cm}$.



- 2. Από τις κορυφές Α και Γ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρνουμε κάθετες προς τη διαγώνιο ΒΔ, τις ΑΚ και ΓΛ αντίστοιχα. Αν Μ, Ν τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα να δείξετε ότι τα Κ, Λ, Μ, Ν είναι κορυφές παραλληλογράμμου.**

Λύση:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle \hat{A}KB$ η ΚΜ είναι διάμεσος

$$\text{άρα } KM = \frac{AB}{2}$$

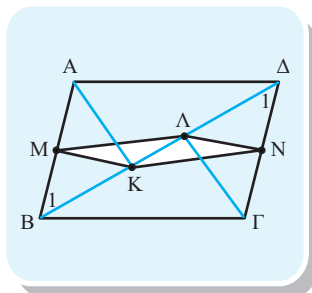
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle \hat{A}LG$ η ΛΝ είναι διάμεσος

$$\text{άρα } LN = \frac{AG}{2}. \text{ Αφού } AB = \Delta\Gamma \text{ θα είναι } KM = LN$$

$$\text{Έχουμε } BL = BK + KL \quad (1)$$

$$\Delta K = \Delta L + KL \quad (2)$$

$$\text{Όμως } \triangle ABK = \triangle LGN \left(\begin{array}{l} \hat{K} = \hat{L} = 90^\circ \\ AB = \Delta\Gamma \\ \hat{B}_1 = \hat{L}_1 \end{array} \right)$$



Άρα είναι $BK = \Delta\Lambda$. Τότε από (1), (2) προκύπτει $B\Lambda = \Delta K$

Είναι $\hat{B}\hat{M}\hat{\Lambda} = \hat{\Delta}\hat{K}\hat{N}$ αφού $MB = \Delta N$ (μισά ίσων τμημάτων)

$$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$B\Lambda = \Delta K$$

Τότε και $M\Lambda = KN$

Άρα το $ΜΛΝΚ$ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

3. Στις πλευρές του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ θεωρούμε τα ίσα τμήματα $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N$. Δείξτε ότι το $ΚΛΜΝ$ είναι παραλληλόγραμμο. Τι θα πρέπει να ισχύει ώστε:

i. $ΚΛΜΝ$ ρόμβος

ii. $ΚΛΜΝ$ τετράγωνο

Λύση:

Είναι $\hat{A}\hat{N}\hat{K} = \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{\Lambda}$ αφού:

$$AK = \Gamma M$$

$$\left. \begin{array}{l} AN = A\Delta - \Delta N \\ \Gamma\Lambda = \Gamma B - B\Lambda \end{array} \right\} \Leftrightarrow AN = \Gamma\Lambda$$

$$\hat{A} = \hat{\Gamma} \text{ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου}$$

Συνεπώς $NK = M\Lambda$. Ομοίως $KL = MN$.

Άρα $ΚΛΜΝ$ παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

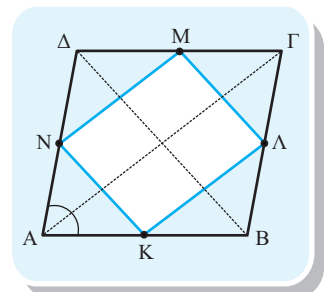
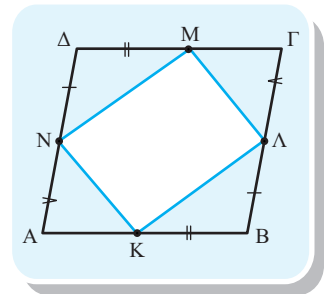
i. Το $ΚΛΜΝ$ είναι ρόμβος όταν το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο και τα K, Λ, M, N είναι μέσα των πλευρών.

$$\text{Τότε } NK // = \frac{\Delta B}{2}$$

$$KL // = \frac{A\Gamma}{2}$$

Αφού $\Delta B = A\Gamma$ τότε $NK = KL$.

Επειδή το $ΚΛΜΝ$ είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, είναι ρόμβος.



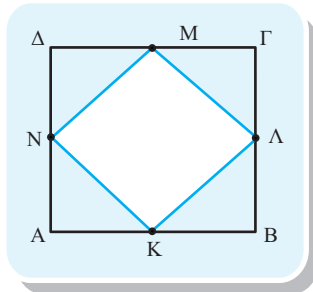
- ii. Για να είναι τετράγωνο αρκεί το $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο και K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών.

Τότε $NK \parallel \Delta B$

$K\Lambda \parallel A\Gamma$

Αφού στο τετράγωνο είναι $\Delta B \perp A\Gamma$ θα είναι και

$NK \perp K\Lambda$. Άρα $K = 90^\circ$



4. Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ τα σημεία E, Z είναι μέσα των $OA, O\Gamma$ αντίστοιχα όπου O το κέντρο του ορθογωνίου.

i. Να δείξετε ότι το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Τι θα πρέπει να ισχύει για να είναι ρόμβος;

iii. Μπορεί το ΔEBZ να είναι τετράγωνο;

Λύση:

- i. Το σημείο O είναι μέσο της ΔB αλλά και της EZ

$$\text{αφού } OE = \frac{OA}{2}, OZ = \frac{O\Gamma}{2}.$$

Άρα ΔEBZ παραλληλόγραμμο αφού οι διαγωνιοί του διχοτομούνται.

- ii. Για να είναι ρόμβος αρκεί οι διαγωνιοί του να είναι κάθετες.

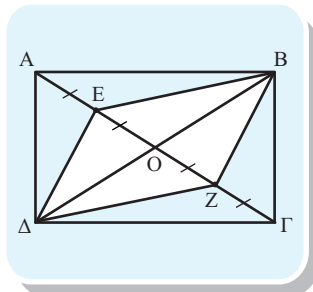
Άρα θα πρέπει $\Delta B \perp EZ$ δηλαδή $\Delta B \perp A\Gamma$.

Αυτό συμβαίνει όταν το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.

- iii. Για να είναι το ΔEBZ τετράγωνο θα πρέπει $EZ \perp \Delta B$ και $EZ = \Delta B$.

$$\text{Όμως } EZ = EO + OZ = \frac{OA}{2} + \frac{O\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{\Delta B}{2}.$$

Άρα δεν μπορεί να είναι τετράγωνο.



5. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta > AB$) του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο O κάθετα. Αν το O και τα μέσα K, Λ των $AB, \Delta\Gamma$ είναι συνευθειακά να δείξετε ότι το $K\Lambda$ είναι ίσο με το τμήμα που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου.

Λύση:

Στο ορθογώνιο $O\hat{A}B$ η OK είναι διάμεσος.

$$\text{Άρα } OK = \frac{AB}{2}.$$

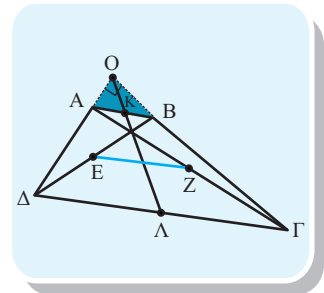
Στο ορθογώνιο $O\hat{\Delta}\Gamma$ η OL είναι διάμεσος.

$$\text{Άρα } OL = \frac{\Gamma\Delta}{2}.$$

$$\text{Είναι } K\Lambda = OL - OK = \frac{\Gamma\Delta}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$$

$$\text{Γνωρίζουμε ότι αν } E, Z \text{ μέσα των διαγωνίων τότε } EZ = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}.$$

$$\text{Άρα } K\Lambda = EZ$$



- 6. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = 60^\circ$ και AK διχοτόμος της $\hat{A}$ όπου K σημείο της $B\Gamma$. Αν Λ μέσο της AK να δείξετε ότι η $B\Lambda$ διχοτομεί τη $\hat{B}$ και να εκφράσετε τη $B\Lambda$ συναρτήσει του AB .**

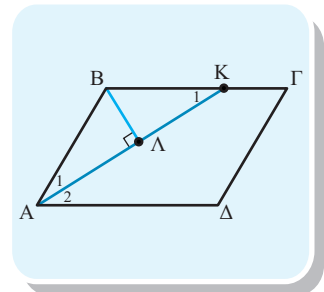
Λύση:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Είναι } \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 30^\circ \\ \text{και } \hat{A}_2 = \hat{K}_1 \text{ (εντός εναλλάξ)} \end{array} \right\} \text{Συνεπώς } \hat{A}_1 = \hat{K}$$

Δηλαδή το τρίγωνο $A\hat{B}K$ είναι ισοσκελές και η $B\Lambda$ είναι διάμεσος άρα διχοτόμος και ύψος.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{\Lambda}B$ είναι:

$$\hat{A}_1 = 30^\circ \Leftrightarrow B\Lambda = \frac{AB}{2}.$$



- 7. Εξωτερικά του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ κατασκευάζουμε τα ισοσκελή και ορθογώνια τρίγωνα $A\Lambda B$ και $\Delta K\Gamma$. Να δείξετε ότι το $\Delta\Lambda B K$ είναι παραλληλόγραμμο.**

Λύση:

Τα τρίγωνα $A\Lambda B$, $\Delta K\Gamma$ είναι ίσα αφού είναι ορθογώνια και έχουν $AB = \Delta\Gamma$, $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 45^\circ$. Συνεπώς $A\Lambda = K\Gamma$ (1).

Ομοίως $\hat{\Delta} \hat{A} \hat{\Lambda} = \hat{B} \hat{\Gamma} \hat{K}$ αφού $A\Delta = B\Gamma$ (ως απέναντι πλευρές του $AB\Gamma\Delta$)

και $A\Lambda = K\Gamma$ (από (1))

Επίσης είναι $\hat{\Delta} \hat{A} \hat{\Lambda} = \hat{A} + \hat{A}_1$ και $\hat{B} \hat{\Gamma} \hat{K} = \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_1$

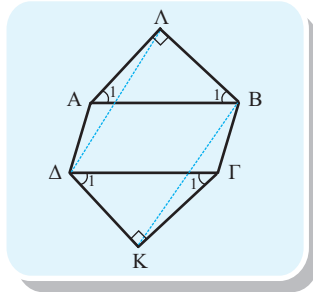
Όμως $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ (ως απέναντι γωνίες του $AB\Gamma\Delta$) και

$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$. Επομένως $\hat{\Delta} \hat{A} \hat{\Lambda} = \hat{B} \hat{\Gamma} \hat{K}$.

Συνεπώς τα τρίγωνα $\hat{\Delta} \hat{A} \hat{\Lambda}$ και $\hat{B} \hat{\Gamma} \hat{K}$ είναι ίσα $\Leftrightarrow \Delta\Lambda = BK$

Επιπλέον $\Lambda B = \Delta K$ (αφού $\hat{A} \hat{\Lambda} \hat{B} = \hat{\Delta} \hat{K} \hat{\Gamma}$)

Επομένως το $\Delta\Lambda BK$ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.



8. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 60^\circ$. Αν είναι $B\Gamma = \Delta\Gamma = 8$ να βρεθεί το μήκος της διαμέσου του τραπέζιου.

Λύση:

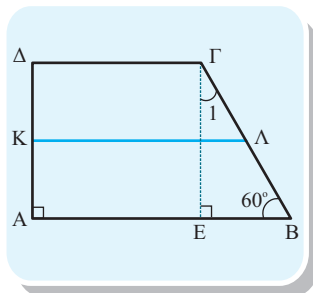
Φέρνουμε το ύψος ΓE του τραπέζιου. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma E B$ είναι $\hat{\Gamma}_1 = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

$$\text{Άρα } EB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Είναι $AB = AE + EB = \Delta\Gamma + EB = 8 + 4 = 12$

Τότε, αν K, Λ μέσα των μη παραλλήλων πλευρών θα

$$\text{είναι: } K\Lambda = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2} = \frac{12 + 8}{2} = \frac{20}{2} = 10$$



9. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = x^2 + 4x, x > 0$. Αν K, Λ μέσα των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα και $K\Lambda = x + 4$ να βρεθεί το x .

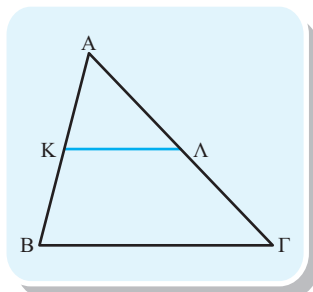
Λύση:

Αφού K, Λ μέσα των $AB, A\Gamma$ τότε $K\Lambda \parallel \frac{B\Gamma}{2}$. Άρα

$$x + 4 = \frac{x^2 + 4x}{2} \Leftrightarrow 2(x + 4) = x^2 + 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

Επομένως $x = 2$ ή $x = -4$ απορρίπτεται.



- 10.** Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Πάνω στις ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα, θεωρούμε σημεία Ε, Ζ τέτοια ώστε ΑΕ = ΓΖ. Αν Κ, Λ μέσα των ΔΕ, ΒΖ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο και ότι οι ΚΛ, ΑΓ, ΔΒ συντρέχουν.

Λύση:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ η ΑΚ είναι διάμεσος που

αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του. Άρα $AK = \frac{DE}{2}$ (1).

Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΒΖ η ΓΛ είναι διάμεσος

που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα $GL = \frac{BZ}{2}$ (2).

Όμως $ZB = DE$ (3) αφού $\hat{A} \hat{\Delta} E = \hat{G} \hat{B} Z$ (είναι ορθογώνια και έχουν $AD = BG$ ως απέναντι πλευρές ορθογώνιου και $AE = GZ$ από υπόθεση). Από (1), (2), (3) συμπεραίνουμε ότι $AK = GL$.

Επίσης $\hat{A} \hat{\Delta} B = \hat{\Delta} \hat{K} \hat{G}$ αφού:

$\Delta \Gamma = AB$ ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου

$\Delta K = \Delta B$ ως μισά των ίσων τμημάτων ΔΕ, ΒΓ

$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΔΕΒΖ

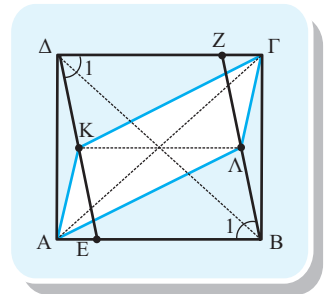
Συνεπώς $K\Gamma = AL$. Άρα το ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο αφού έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

Το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού $DE = BZ$ και $DZ = EB$ αφού

$\Delta Z = \Delta \Gamma - Z\Gamma$ και $EB = AB - AE$

Οι ΑΓ, ΚΛ είναι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου ΑΚΓΛ άρα διχοτομούνται.

Όμως η ΑΓ διαγώνιος και του ΑΒΓΔ. Άρα διχοτομείται με την ΔΒ. Επομένως οι ΑΓ, ΚΛ, ΔΒ συντρέχουν στο Ο το κέντρο του ΑΒΓΔ.



- 11.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma} = 45^\circ$. Φέρουμε τα ύψη ΑΔ και ΒΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΑΒ να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

Λύση:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ, Μ μέσο της υποτείνουσας άρα $\Delta M = \frac{AB}{2}$ (1)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ, Μ μέσο της υποτείνουσας άρα $EM = \frac{AB}{2}$ (2)

Από (1),(2) έχουμε $\Delta M = EM$ δηλαδή το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές.

Για να είναι η $\hat{M} = 90^\circ$ αρκεί $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 90^\circ$

Στο ισοσκελές τρίγωνο AME ($AM = ME$) είναι:

$$\hat{M}_1 + \hat{A} + \hat{E}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{M}_1 = 180^\circ - 2\hat{A} \text{ αφού } \hat{A} = \hat{E}_1$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο BMD ($MB = MD$) είναι:

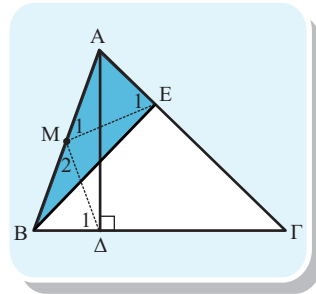
$$\hat{M}_2 + \hat{B} + \hat{D}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{M}_2 = 180^\circ - 2\hat{B} \text{ αφού } \hat{B} = \hat{D}_1$$

Τότε:

$$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ - 2\hat{A} + 180^\circ - 2\hat{B} = 360^\circ - 2(\hat{A} + \hat{B})$$

$$\text{Όμως } \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$\text{Άρα } \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 360^\circ - 2 \cdot 135^\circ = 90^\circ.$$



12. Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ όπου $\Delta\Gamma \parallel AB$ και $\Delta\Gamma = 4AB$.

i. Να δείξετε ότι $ZH = \frac{5AB}{2}$ όπου ZH η διάμεσος.

ii. Αν K, Λ, Μ σημεία της ΔΓ τέτοια ώστε $\Delta K = K\Lambda = \Lambda M = M\Gamma$, να δείξετε ότι ABKΔ, ABΓM παραλληλόγραμμα.

iii. Αν η διάμεσος του τραπεζίου τέμνει τις BK, AM στα Θ, Ι να δείξετε

$$\text{ότι } \Theta I = \frac{AB}{2}.$$

Λύση:

i. Είναι $ZH = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2} = \frac{AB + 4AB}{2} = \frac{5AB}{2}.$

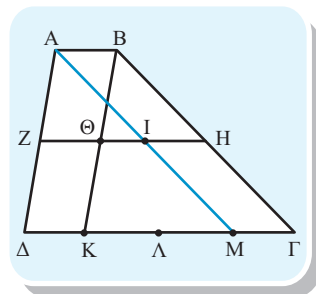
ii. Είναι $\Delta K = \frac{1}{4}\Delta\Gamma = AB$ και αφού $AB \parallel \Delta K$ θα είναι το ABKΔ παραλληλόγραμμα.

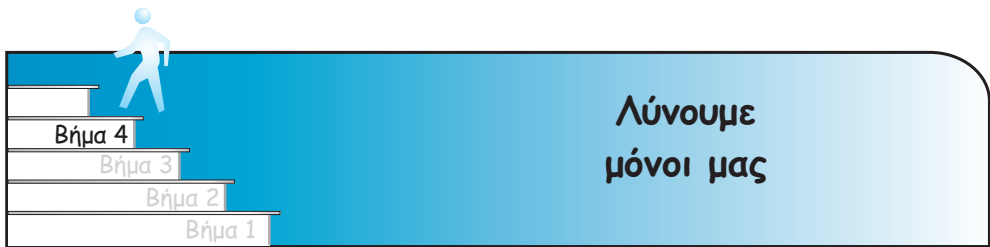
Είναι $M\Gamma = \frac{1}{4}\Delta\Gamma = AB$ και αφού $AB \parallel M\Gamma$ θα είναι

το ABΓM παραλληλόγραμμα.

iii. Αφού ZH διάμεσος τότε και Θ, Ι τα μέσα των BK, AM.
Άρα και $Z\Theta \parallel AB$, $I\Gamma \parallel AB$.

$$\text{Οπότε } \Theta I = ZH - Z\Theta - I\Gamma = \frac{5AB}{2} - AB - AB = \frac{AB}{2}.$$





1. Δίνεται ορθογώνιο $ABΓΔ$ με $AB = 4BΓ$. Θεωρούμε σημεία E, Z επί της AB τέτοια ώστε $AE = ZB = BΓ$.

- Να δείξετε ότι το $ΔΕΖΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- Να βρεθεί η διάμεσός του $ΚΛ$ συναρτήσει της $BΓ$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ και M μέσο της υποτείνουσας. Αν ME, MA οι αποστάσεις του M από τις $AB, AΓ$ αντίστοιχα να δείξετε ότι το $MEAA$ είναι ορθογώνιο.

.....

.....

.....

.....

.....

3. Σε ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AΓ$), $Θ$ το βαρύκεντρό του και $Δ, Z, E$ μέσα των $BΓ, AB$ και $AΓ$ αντίστοιχα.

- Να δείξετε ότι $AZΔE$ ρόμβος.
- Αν $Λ$ το μέσο της $AΘ$, να δείξετε ότι $ΛΖOE$ ρόμβος.

.....

.....

.....

.....

.....

4. Οι μη παράλληλες πλευρές τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται στο O . Αν K, M είναι μέσα των διαγωνίων και E, Z είναι μέσα των βάσεων, να δείξετε ότι $\hat{KEM} = \hat{KZM} = \hat{O}$.

.....

.....

.....

.....

.....

5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), είναι Z, E μέσα των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα, AD ύψος και H μέσο ZE . Να δείξετε ότι:

i. $\Delta H = \frac{B\Gamma}{4}$

- ii. Η περίμετρος του τριγώνου $E\Delta Z$ είναι ίση με το μισό της περιμέτρου του $AB\Gamma$.

.....

.....

.....

.....

.....

6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η υποτείνουσα $B\Gamma$ είναι η διπλάσια από την AB . Προβάλλουμε το A στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της B . Αν Z, Δ οι προβολές αντίστοιχα, να δείξετε ότι:
- $\Delta Z // B\Gamma$
 - Z μέσο της AH και H μέσο της $B\Gamma$ (όπου H το σημείο στο οποίο η AZ τέμνει τη $B\Gamma$)
 - Να βρεθούν οι γωνίες των τριγώνων ABH και $AH\Gamma$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O . Εξωτερικά του ορθογωνίου κατασκευάζουμε τα ισοσκελή τρίγωνα AKB και $BA\Gamma$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο KOA είναι ορθογώνιο.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. Εξωτερικά του ρόμβου $AB\Gamma\Delta$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $\Gamma\Delta EZ$ και $B\Gamma KA$. Να δείξετε ότι το $KZ\Delta B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ τα K, Λ, M, N είναι μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα τμήματα $AK, BM, \Gamma N, \Delta K$ τεμνόμενα σχηματίζουν τετράγωνο.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τετράγωνα $A\Gamma K\Lambda$ και $AB\Delta E$
- i. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου $A\overset{\Delta}{E}\Lambda$
- ii. Να δείξετε ότι το $B\Gamma\Lambda E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

11. Στα μέσα K, Λ των πλευρών AG και AB τριγώνου ABG φέρνουμε

$$K\Theta \perp AG \text{ και } \Lambda I \perp AB \text{ ώστε } K\Theta = \frac{AG}{2} \text{ και } \Lambda I = \frac{AB}{2}.$$

Αν Δ μέσο της BG να δείξετε ότι $I\overset{\Delta}{\Theta}\Delta$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

12. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και O το κέντρο του και E τυχαίο σημείο της AO . Φέρνουμε $\Gamma\Lambda \perp \Delta E$ όπου M το σημείο τομής της $\Gamma\Lambda$ με την AO . Να δείξετε ότι:

i. $\Gamma M = \Delta E$

ii. $BM = \Gamma E$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

13. Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ από τις κορυφές A και Γ φέρνουμε ΓZ κάθετες στη ΔB . Ναδειχθεί ότι το $A\epsilon\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο και έχει το ίδιο κέντρο με το $AB\Gamma\Delta$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 14.** Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB = 2B\Gamma$. Από την κορυφή A φέρνουμε την $AE \perp B\Gamma$ και ενώνουμε το E με το μέσο M της $\Delta\Gamma$. Να αποδειχθεί ότι $\Delta\hat{M}E = 3M\hat{E}\Gamma$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 15.** Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το O είναι το σημείο τομής των διαμέσων AM , BN και ΓZ . Αν η H είναι το μέσο της $O\Gamma$ να αποδειχθεί ότι η BH τέμνει την

AM στο E ώστε: $OE = \frac{2}{9}AM$

.....

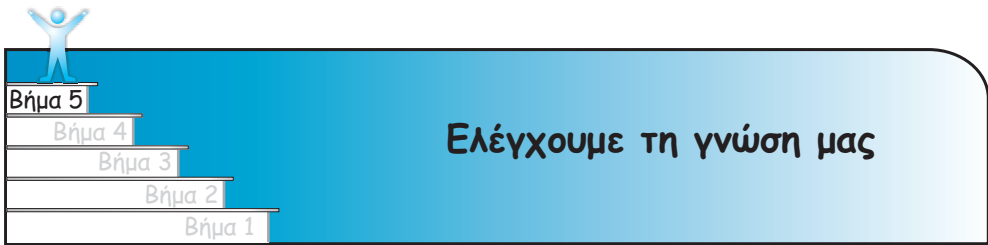
.....

.....

.....

.....

.....



Θέμα 1°

- A. Να δείξετε ότι οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται και αντίστροφα εάν σε τυχαίο τετράπλευρο οι διαγώνιοι διχοτομούνται τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο.
(Μονάδες 8)
- B. Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.
(Μονάδες 8)
- Γ. Να δείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
(Μονάδες 9)

Θέμα 2°

- A. Δίνεται το τρίγωνο ABΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από το Δ φέρνουμε τη ΔΕ//ΑΒ και την ΕΖ//ΒΓ. Ναδειχθεί ότι ΑΕ = ΒΖ.
(Μονάδες 9)
- B. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ και την ΑΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΓΔ. Ναδειχθεί ότι:
- i. $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}Z = \hat{B}\hat{\Gamma}E$ ii. τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά.
(Μονάδες 16)

Θέμα 3°

- A. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΓ > ΑΒ. Φέρνουμε τη διχοτόμο Αχ της $\hat{A}$ και τη ΒΔ ⊥ Αχ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, ναδειχθεί ότι:
- i. $\Delta M = \frac{AG - AB}{2}$ ii. $\hat{\Delta B \Gamma} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$ iii. $B\hat{A}M = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$
(Μονάδες 15)

B. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ονομάζουμε Δ το μέσο της διαμέσου AM . Η ευθεία $B\Delta$ τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Ναδειχθεί ότι: $E\Gamma = \frac{2}{3}A\Gamma$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 4°

A. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $\hat{A} = 135^\circ$. Φέρνουμε κάθετη στην AB στο A , που τέμνει τη $B\Gamma$ στο Δ . Ναδειχθεί ότι $A\Gamma = \frac{B\Delta}{2}$

(Μονάδες 10)

B. Στην πλευρά $\Gamma\Delta$ τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε τυχαίο σημείο E . Αν η διχοτόμος της $B\hat{A}E$ συναντά τη $B\Gamma$ στο Z , ναδειχθεί ότι $AE = BZ + \Delta E$.

(Μονάδες 15)

Κεφάλαιο 6°

Εγγεγραμμένα σχήματα

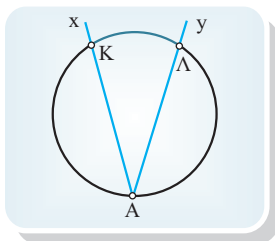
Ο μαθητής που έχει μελετήσει το κεφάλαιο 6 θα πρέπει να είναι σε θέση:

- ✓ Να γνωρίζει και να εφαρμόζει τη σχέση μεταξύ μιας εγγεγραμμένης γωνίας και της αντίστοιχης επίκεντρης καθώς και τις προτάσεις που προκύπτουν.
- ✓ Να γνωρίζει και να εφαρμόζει τη σχέση μεταξύ μιας γωνίας και της γωνίας που σχηματίζεται από μια χορδή και την εφαπτόμενη στο άκρο της.
- ✓ Να γνωρίζει και να εφαρμόζει τους τύπους που μας δίνουν το μέτρο της γωνίας που σχηματίζεται από δύο τέμνουσες του κύκλου (είτε τεμνόνται εντός είτε εκτός του κύκλου).
- ✓ Να γνωρίζει τις ιδιότητες των εγγράψιμων τετραπλεύρων καθώς και τα κριτήρια που εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.
- ✓ Ομοίως για τα περιγράψιμα τετράπλευρα.

Εγγεγραμμένη γωνία

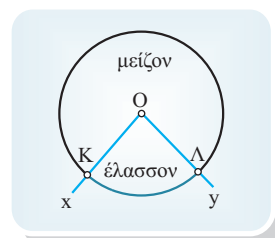
Ορισμός

Μια γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη σε κύκλο**, όταν η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο.



Μια γωνία, της οποίας η κορυφή είναι το κέντρο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο λέγεται **επίκεντρη**.

Σε κάθε επίκεντρη γωνία αντιστοιχίζουμε ένα από τα δύο τόξα (βλ. σχήμα) του κύκλου με άκρα K και Λ το



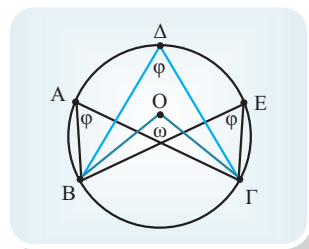
οποίο ονομάζουμε **αντίστοιχο τόξο** της επίκεντρης γωνίας. Λέμε τότε ότι η γωνία **βαίνει** στο τόξο $\widehat{KL}$.

Αν δεν αναφέρεται κάτι άλλο θα θεωρούμε στα επόμενα ότι οι γωνίες βαίνουν στο έλασσον τόξο (κυρτές γωνίες). Το μέτρο της επίκεντρης γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του τόξου στο οποίο βαίνει.

Θεώρημα

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης (δηλαδή της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο π.χ. στο διπλανό σχήμα είναι $\omega = 2\varphi$).

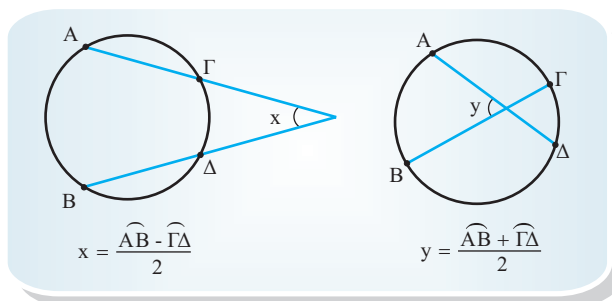
Σε κάθε τόξο μπορεί να βαίνει μια μόνο επίκεντρη γωνία, όμως σε αυτό μπορούν να βαίνουν άπειρες εγγεγραμμένες.



Πορίσματα

- α. Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας είναι ίσο με το μισό του αντίστοιχου τόξου.
- β. Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες.
- γ. Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ίσα τόξα, ίσων κύκλων είναι ίσες.
- δ. Εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικόκλιο είναι ορθές.

Γωνία δύο τεμνουσών

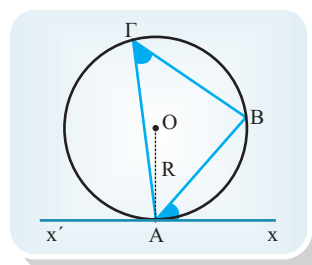


Γωνία χορδής και εφαπτομένης

Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε χορδή AB και την εφαπτομένη στο σημείο A, την $x'Ax$. Κάθε μία από τις γωνίες BAx και BAx' λέγεται **γωνία χορδής και εφαπτομένης**.

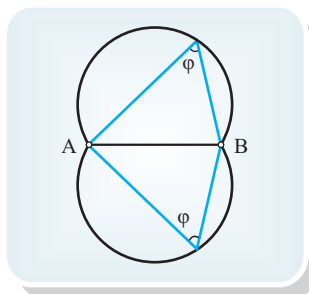
Η οξεία γωνία BAx λέγεται γωνία της χορδής AB και του κύκλου (O,R).

Το τόξο AB που περιέχεται μεταξύ των πλευρών της γωνίας χορδής και εφαπτομένης λέγεται **αντίστοιχο τόξο της γωνίας αυτής**.



Η γωνία χορδής και εφαπτομένης είναι ίση με κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο της χορδής.

Βασικός Γεωμετρικός Τόπος

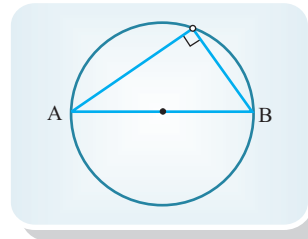


Ολές οι εγγεγραμμένες γωνίες στο ίδιο τόξο είναι ίσες. Οι κορυφές των γωνιών αυτών “βλέπουν τη χορδή του τόξου με ίσες γωνίες”. Λέμε λοιπόν ότι:

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα AB φαίνεται υπό γωνία $\hat{\phi}$ είναι δύο τόξα κύκλων συμμετρικά ως προς την AB. Από τα τόξα εξαιρούνται τα σημεία A και B.

Πόρισμα

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα φαίνεται υπό ορθή γωνία είναι κύκλος διαμέτρου AB. Εξαιρούνται τα άκρα A και B του τμήματος.

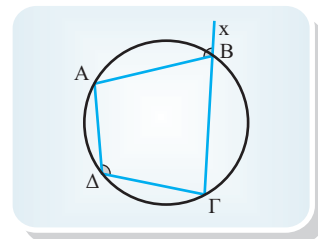
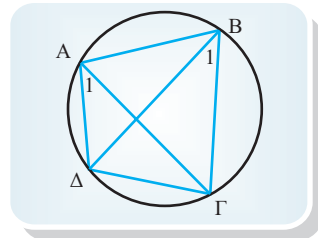
**Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο**

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο** σε κύκλο αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου. Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγράψιμο** σε κύκλο, αν υπάρχει κύκλος, που διέρχεται από τις κορυφές του.

Θεώρημα

Ένα τετράπλευρο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις εξής ιδιότητες:

- α. Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές ($\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Delta} = 180^\circ$)
- β. Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές με ίσες γωνίες, π.χ. ($\hat{A}_1 = \hat{B}_1$)
- γ. Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου είναι ίση με την απέναντι εσωτερική του γωνία.

**Θεώρημα (Κριτήριο)**

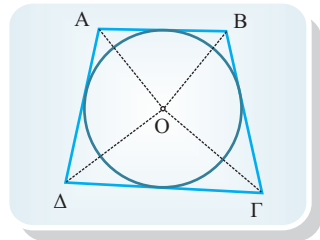
Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν έχει μία από τις παρακάτω ιδιότητες:

- α. Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- β. Μια πλευρά του “φαίνεται” από τις απέναντι κορυφές με ίσες γωνίες.
- γ. Μια εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική του γωνία.

Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγεγραμμένο** σε κύκλο, αν όλες οι πλευρές του εφάπτονται στον κύκλο.

Σε κάθε περιγεγραμμένο τετράπλευρο ισχύουν οι ιδιότητες:

- α. Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- β. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.



Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγράψιμο** σε κύκλο, αν υπάρχει κύκλος που εφάπτεται στις πλευρές του.

Θεώρημα (Κριτήριο)

Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο αν:

- α. Οι διχοτόμοι τριών τουλάχιστον γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.
- β. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

**Θεώρημα**

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

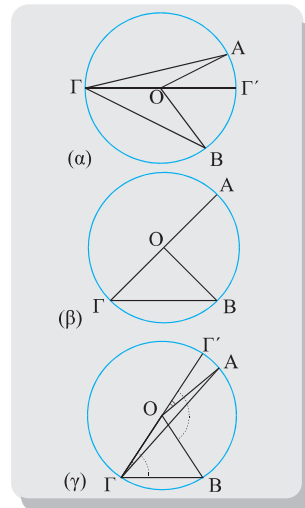
Απόδειξη

Έστω κύκλος (O, R) και ένα τόξο του $\widehat{AB}$. Ας θεωρήσουμε την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$ και σημείο Γ του κύκλου που δεν ανήκει στο τόξο $\widehat{AB}$. Τότε θα αποδείξουμε ότι $\widehat{AOB} = 2\widehat{AGB}$.

Ας μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου το κέντρο O του κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας $\widehat{AGB}$ (σχ. α). Έστω Γ' το αντιδιαμετρικό σημείο του Γ . Το τρίγωνο $AO\Gamma$ είναι ισοσκελές, επομένως $\widehat{OAG} = \widehat{OGA}$. Η $\widehat{\Gamma'OA}$ είναι εξωτερική του τριγώνου $AO\Gamma$, επομένως $\widehat{\Gamma'OA} = 2\widehat{OGA}$ και όμοια έχουμε ότι $\widehat{\Gamma'OB} = 2\widehat{OGB}$.

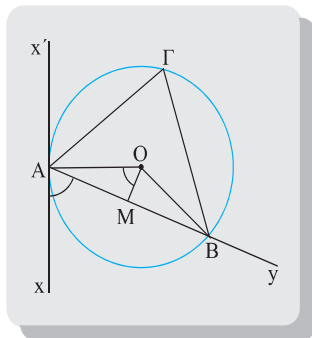
Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω ισότητες έχουμε ότι

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AGB}.$$



Θεώρημα

Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

**Απόδειξη**

Έστω ότι η γωνία χορδής και εφαπτομένης $\widehat{x\hat{A}y}$ είναι οξεία (σχ. 6) και $\widehat{A\Gamma B}$ μια τυχαία εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής AB. Γνωρίζουμε ότι $\widehat{A\Gamma B} = \frac{\widehat{A\hat{O}B}}{2}$. Φέρουμε το απόστημα OM, οπότε $\widehat{A\hat{O}M} = \widehat{M\hat{O}B} = \frac{\widehat{A\hat{O}B}}{2} = \widehat{A\hat{\Gamma}B}$. Αλλά $\widehat{x\hat{A}y} = \widehat{A\hat{O}M}$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές. Επομένως $\widehat{x\hat{A}y} = \widehat{A\hat{\Gamma}B}$.

Θεώρημα

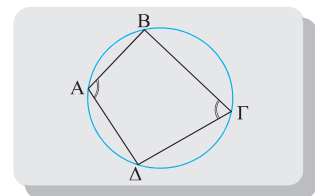
Ένα τετράπλευρο ABΓΔ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- (ii) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

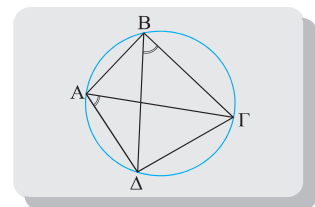
Απόδειξη

(i) Η γωνία $\hat{A}$ βαίνει στο τόξο $\widehat{B\Gamma\Delta}$, ενώ η $\hat{\Gamma}$ στο $\widehat{BA\Delta}$, με $\widehat{B\Gamma\Delta} + \widehat{BA\Delta} = 4\angle$ (σχ. 1). Επομένως $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\angle$.

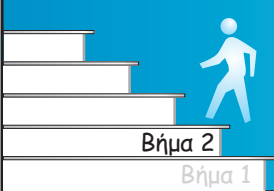
(ii) Δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές κορυφές του τετραπλεύρου ABΓΔ (π.χ. οι A, B) είναι και κορυφές δύο ίσων εγγεγραμμένων γωνιών ($\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma}$ και $\widehat{\Delta\hat{B}\Gamma}$), που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$, που ορίζει η απέναντι πλευρά ΓΔ (σχ. 2).



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Επαναλαμβάνουμε
τις ασκήσεις
"κλειδιά"

A. Από το σχολικό βιβλίο**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ έκδοση 2003.**

σ. 129: Ασκήσεις Εμπέδωσης 1, 2, 3, 4, 5

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1, 2, 3

Σύνθετα Θέματα 1

σ. 134: Ερωτήσεις Κατανόησης 4, 5, 6

Ασκήσεις Εμπέδωσης 2, 3

Αποδεικτικές Ασκήσεις 1, 3



- 1. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, τριγώνου $AB\Gamma$, τέμνει τον περιγεγραμμένο του κύκλου στο M και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την AM στο Δ , να δείξετε ότι το τρίγωνο $M\Delta$ είναι ισοσκελές.**

Λύση:

Επειδή η AM είναι διχοτόμος της $\hat{A}$, θα ισχύει:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}. \text{ Επίσης και } \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}, \text{ αφού η } B\Delta$$

είναι διχοτόμος της $\hat{B}$. Στο $B\hat{A}M$ έχουμε:

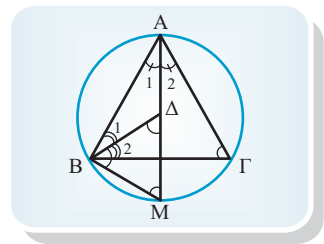
- $\hat{M} = \hat{\Gamma}$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο τόξο $\widehat{AB}$.

- $M\hat{B}\Gamma = \hat{A}_2$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο τόξο $\widehat{M\Gamma}$.

$$\text{Οπότε: } \Delta\hat{B}M = \hat{B}_2 + M\hat{B}\Gamma = \hat{B}_2 + \hat{A}_2 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$$

$$\bullet \quad B\hat{\Delta}M = 180^\circ - \Delta\hat{B}M - \hat{M} = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}\right) - \hat{\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{\Gamma} = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$$

Άρα $\Delta\hat{B}M = B\hat{\Delta}M = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$, οπότε το $M\hat{B}\Delta$ είναι ισοσκελές με κορυφή το M .



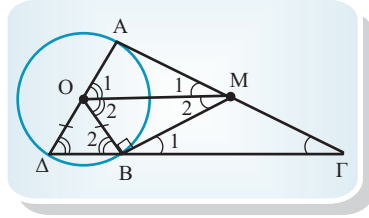
- 2. Από σημείο M εκτός κύκλου (O, R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB στον κύκλο. Προεκτείνουμε την AM και στην προέκταση παίρνουμε τμήμα $M\Gamma = MA$. Αν Δ είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του A , να δείξετε ότι τα σημεία Δ, B, Γ είναι συνευθειακά.**

Λύση:

Ισχύει: $MA = MB$ (1) ως εφαπτομένα τμήματα προς κύκλο από σημείο αυτού.

Επίσης η OM διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}MB$ και $\hat{A}OB$, οπότε: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$.

Όμως $MG = MA \Rightarrow MG = MB$. Άρα το τρίγωνο MBΓ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$ ως προσκείμενες



μενες γωνίες στην βάση του BΓ. Η $\hat{A}MB$ είναι εξωτερική γωνία του $\triangle MB\Gamma$, οπότε: $\hat{A}MB = \hat{B}_1 + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = \hat{B}_1 + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 2 \cdot \hat{B}_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cdot \hat{M}_2 = 2 \cdot \hat{B}_1 \Leftrightarrow \hat{M}_2 = \hat{B}_1$. Άρα $B\Gamma \parallel OM$ (2) διότι τεμνόμενες από την BM σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες. Επειδή $OD = OB = R$ το τρί-

γωνο OΔB είναι ισοσκελές. Άρα $\hat{\Delta} = \hat{B}_2$. Όμως $\hat{\Delta} = \frac{1}{2} \hat{A}OB$, αφού μια εγγε-

γραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν. Άρα $\hat{\Delta} = \hat{O}_2 \Leftrightarrow \hat{B}_2 = \hat{O}_2$ οπότε $B\Delta \parallel OM$ (3) διότι τεμνόμενες από την OB σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες. Άρα από τις (2) και (3) και λόγω του αιτήματος του Ευκλείδη, συμπεραίνουμε ότι οι ευθείες BΔ και BΓ ταυτίζονται. Επομένως τα σημεία Δ, B, Γ είναι συνευθειακά.

3. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ, θεωρούμε τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ και έστω Η το ορθόκεντρό του. Στο ΕΓ παίρνουμε τμήμα ΕΖ = ΑΕ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΗΖΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Λύση:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle A\hat{\Delta}\Gamma$ ($\hat{\Delta} = 1^\perp$) έχουμε:

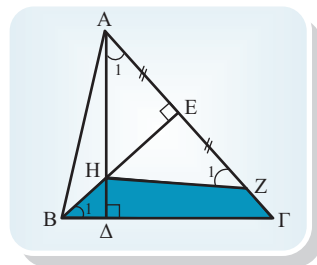
$$\hat{A}_1 + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A}_1 = 90^\circ - \hat{\Gamma} \quad (1)$$

Ομοίως από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle B\hat{E}\Gamma$ ($\hat{E} = 1^\perp$) έχουμε: $\hat{B}_1 = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ (2)

Το $\triangle A\hat{H}Z$ είναι ισοσκελές, αφού το ΗΕ είναι ύψος

και διάμεσος, άρα $\hat{Z}_1 = \hat{A}_1 \Leftrightarrow \hat{Z}_1 = 90^\circ - \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{Z}_1 = \hat{B}_1$.

Άρα το τετράπλευρο ΒΗΖΓ είναι εγγράψιμο αφού μια εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία.



4. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε το ύψος του $A\Delta$. Από τυχαίο σημείο M του $A\Delta$ φέρουμε τις αποστάσεις του ME και MZ από τις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το $BEZ\Gamma$ είναι εγγράψιμο.

Λύση:

Το τετράπλευρο $EM\Delta B$ είναι εγγράψιμο, αφού

$$\widehat{BEM} + \widehat{B\Delta M} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

$$\text{Άρα } \widehat{B} + \widehat{EM\Delta} = 180^\circ \quad (1)$$

Ομοίως και το τετράπλευρο $AEMZ$ είναι εγγράψιμο ($\widehat{AEM} + \widehat{AZM} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$), οπότε η πλευρά του EM φαίνεται από τις κορυφές A και Z υπό ίσες γωνίες. Άρα $\widehat{EAM} = \widehat{EZM}$ (2).

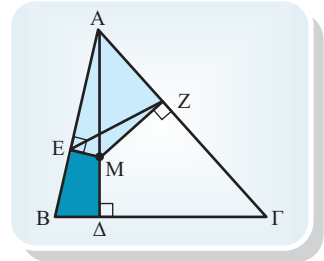
Στο τρίγωνο AEM η $\widehat{EM\Delta}$ είναι εξωτερική, οπότε:

$$\widehat{EM\Delta} = \widehat{EAM} + \widehat{AEM} \Leftrightarrow \widehat{EM\Delta} = \widehat{EAM} + 90^\circ \quad (3)$$

Στο τετράπλευρο $BEZ\Gamma$ έχουμε:

$$\widehat{B} + \widehat{EZ\Gamma} = \widehat{B} + (\widehat{EZM} + \widehat{MZ\Gamma}) \stackrel{(2)}{=} \widehat{B} + (\widehat{EAM} + 90^\circ) \stackrel{(3)}{=} \widehat{B} + \widehat{EM\Delta} \stackrel{(1)}{=} 180^\circ$$

Άρα το $BEZ\Gamma$ είναι εγγράψιμο, αφού δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.



5. Δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) με $R > \rho$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Από το σημείο Δ του κύκλου (Λ, ρ) φέρουμε ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο (Λ, ρ) και τέμνει τον κύκλο (K, R) στα σημεία B, Γ . Να δείξετε ότι η $A\Delta$ είναι εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

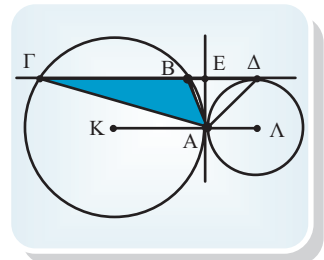
Λύση:

Αρκεί να δείξουμε ότι: $\widehat{B\Delta A} = \widehat{\Lambda\Delta A}$

Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ η $\widehat{\Lambda\Delta A}$ είναι εξωτερική του γωνία, οπότε: $\widehat{\Lambda\Delta A} = \widehat{A\Gamma B} + \widehat{A\Delta E}$ (1)

Φέρουμε την κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων, η οποία τέμνει της $\Gamma\Delta$ στο E . Τότε $EA = ED$ σαν εφαπτόμενα τμήματα από το E προς τον κύκλο (Λ, ρ) . Άρα $\widehat{A\Delta E} = \widehat{\Delta\Lambda E}$ (2) σαν προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου.

Επίσης $\widehat{EAB} = \widehat{A\Gamma B}$ (3) διότι η γωνία από χορδή και εφαπτομένη είναι ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο αντίστοιχο τόξο της.



$$\text{Η (1)} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \hat{\Lambda\hat{A}\hat{\Delta}} = \hat{E\hat{A}\hat{B}} + \hat{\Delta\hat{A}\hat{E}} \Leftrightarrow \hat{\Lambda\hat{A}\hat{\Delta}} = \hat{B\hat{A}\hat{\Delta}} \text{ ο.ε.δ.}$$

$$\stackrel{(3)}{\Rightarrow}$$

6. Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB, θεωρούμε το μέσο του M. Έστω Λ τυχαίο σημείο του τόξου $\widehat{AB}$. Φέρουμε την ευθεία $MK \perp AL$. Να δείξετε ότι: $MK = KL$

Λύση:

Φέρουμε τα τμήματα LM, AM, OL, όπου O το κέντρο του ημικύκλιου. Τότε $OM \perp AB$, αφού για την επίκεντρη γωνία $\hat{B\hat{O}\hat{M}}$ ισχύει $\hat{B\hat{O}\hat{M}} = 90^\circ$ διότι βαί-

$$\text{νει στο τόξο } \widehat{BM} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Στο τρίγωνο ALM η $\hat{K\hat{L}\hat{M}}$ είναι εξωτερική, οπό-

$$\text{τε: } \hat{K\hat{L}\hat{M}} = \hat{\Lambda\hat{A}\hat{M}} + \hat{A\hat{M}\hat{\Lambda}} \quad (1)$$

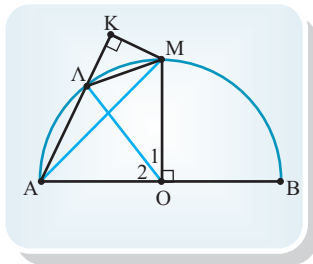
Όμως κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι, κατά μέτρο, ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν.

$$\text{Άρα: } \bullet \hat{\Lambda\hat{A}\hat{M}} = \frac{1}{2} \hat{O}_1 \quad \bullet \hat{A\hat{M}\hat{\Lambda}} = \frac{1}{2} \hat{O}_2$$

$$\text{Η (1)} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \hat{K\hat{L}\hat{M}} = \frac{1}{2} \hat{O}_1 + \frac{1}{2} \hat{O}_2 \Leftrightarrow \hat{K\hat{L}\hat{M}} = \frac{1}{2} (\hat{O}_1 + \hat{O}_2) \Leftrightarrow \hat{K\hat{L}\hat{M}} = \frac{1}{2} \hat{A\hat{O}\hat{M}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{K\hat{L}\hat{M}} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ \Leftrightarrow \hat{K\hat{L}\hat{M}} = 45^\circ$$

Το τρίγωνο KLM είναι ορθογώνιο στο K και $\hat{K\hat{L}\hat{M}} = 45^\circ$, οπότε και $\hat{K\hat{M}\hat{L}} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Άρα το τρίγωνο KLM είναι και ισοσκελές, οπότε $LK = MK$.



7. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τριγώνου ABΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου σε σημείο Δ, να δείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο IBD είναι ισοσκελές, όπου I είναι το εγκεντρο του τριγώνου ABΓ.

β. Το σημείο Δ είναι περίκεντρο του τριγώνου IBΓ.

Λύση:

α. Φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ του τριγώνου ABΓ, οι οποίες

τέμνονται στο έγκεντρο I. Τότε: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$ και

$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$. Στο τρίγωνο IBΔ έχουμε:

- η γωνία του $\widehat{B\hat{I}\Delta}$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ABI, οπότε:

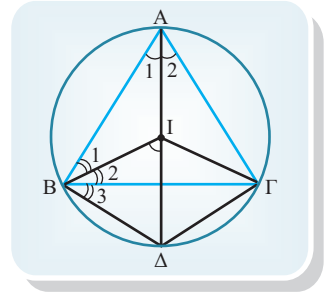
$$\widehat{B\hat{I}\Delta} = \hat{B}_1 + \hat{A}_1 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$$

- $\widehat{I\hat{B}\Delta} = \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = \hat{B}_2 + \hat{A}_2 = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$, αφού $\hat{B}_3 = \hat{A}_2$ σαν εγγεγραμμέ-

νες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$. Άρα $\widehat{B\hat{I}\Delta} = \widehat{I\hat{B}\Delta}$ οπότε το τρίγωνο IBΔ είναι ισοσκελές με κορυφή το Δ, οπότε: $\Delta B = \Delta I$ (1)

- β. Επειδή οι εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ είναι ίσες, θα είναι ίσες και οι αντίστοιχες χορδές τους, δηλαδή $\Delta B = \Delta \Gamma$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $\Delta B = \Delta I = \Delta \Gamma$, δηλαδή το Δ ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου IBΓ, άρα είναι το περίκεντρο του.

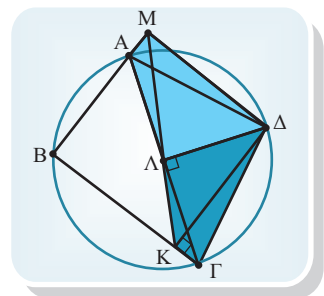


- 8. Έστω σημείο Δ το οποίο δεν ανήκει στο εσωτερικό τριγώνου ABΓ. Αν οι προβολές του Δ στις πλευρές του τριγώνου ABΓ είναι συνευθειακά σημεία, να δείξετε ότι το Δ ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABΓ.**

Λύση:

Έστω $\Delta K \perp B\Gamma$, $\Delta \Lambda \perp A\Gamma$, $\Delta M \perp AB$, με τα σημεία K, Λ, M να ανήκουν στην ίδια ευθεία. Για να δείξουμε ότι το Δ ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABΓ αρκεί να δείξουμε ότι το ABΓΔ είναι εγγράψιμο. Το τετράπλευρο KΛΔΓ είναι εγγράψιμο, αφού $\widehat{K\hat{\Delta}\Gamma} = \widehat{\Gamma\hat{\Delta}\Lambda} = 90^\circ$, δηλαδή η πλευρά του ΓΔ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του K, Λ υπό ίσες

γωνίες. Άρα $\widehat{B\hat{\Gamma}\Delta} = \widehat{\Lambda\hat{\Gamma}\Delta}$ (1), διότι σε εγγράψιμο τετράπλευρο μια εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική. Επίσης το τετράπλευρο AMΔΛ είναι εγγράψιμο, αφού δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές ($\widehat{A\hat{\Lambda}\Delta} + \widehat{A\hat{M}\Delta} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$). Άρα $\widehat{\Delta\hat{\Lambda}M} = \widehat{\Delta\hat{A}M}$ (2), αφού σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι



κορυφές υπό ίσες γωνίες.

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\widehat{B\Gamma\Delta} = \widehat{\Delta\hat{A}M}$. Συνεπώς στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, μια εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική. Άρα το $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο.

9. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE . Αν H το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, M το μέσο της πλευράς AB και N το μέσο του HB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔMEN είναι εγγράψιμο.

Λύση:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{B}\Delta$ η $M\Delta$ είναι η διάμεσος του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του AB .

Άρα $\Delta M = \frac{AB}{2} = AM$. Συνεπώς το τρίγωνο $A\Delta M$

είναι ισοσκελές με κορυφή το M , οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}$ (1) ως προσκείμενες γωνίες στην βάση του $A\Delta$. Τότε για την εξωτερική γωνία $\hat{M}_1$ του τριγώνου $A\Delta M$

έχουμε: $\hat{M}_1 = \hat{A} + \hat{\Delta}_1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{M}_1 = 2\hat{A}$ (2).

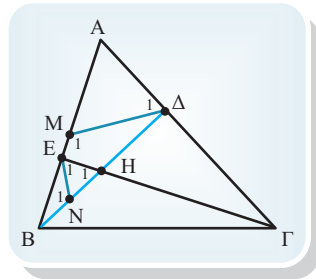
Το τετράπλευρο $A\Delta H E$ έχει $A\hat{\Delta}H + A\hat{E}H = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, οπότε είναι εγγράψιμο. Συνεπώς θα ισχύει ότι $\hat{H}_1 = \hat{A}$ (3), αφού κάθε εξωτερική γωνία εγγράψιμου τετραπλευρού είναι ίση με την απέναντι εσωτερική.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BEH η EN είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτεί-

νουσα BH . Άρα $EN = \frac{BH}{2} = NH$. Δηλαδή το τρίγωνο ENH είναι ισοσκελές με

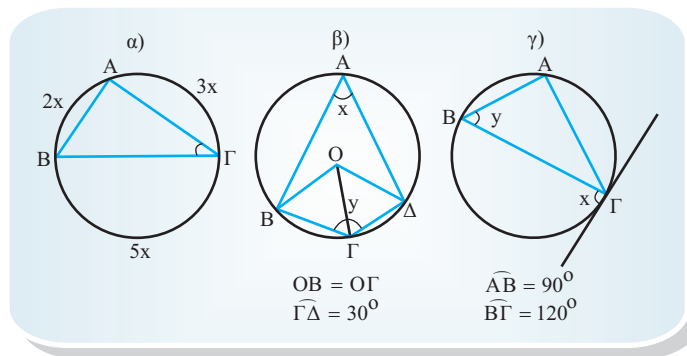
κορυφή N . Άρα $\hat{H}_1 = \hat{E}_1$ (4) ως προσκείμενες γωνίες στη βάση του. Οπότε για την εξωτερική του γωνία $\hat{N}_1$ έχουμε:

$\hat{N}_1 = \hat{E}_1 + \hat{H}_1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{N}_1 = 2\hat{H}_1 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \hat{N}_1 = \hat{M}_1$. Άρα το τετράπλευρο ΔMEN είναι εγγράψιμο, αφού μια εξωτερική γωνία του είναι ίση με την απέναντι εσωτερική.





1. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x και y (όπου x , y γωνίες ή τόξα ανάλογα).

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

2. Στην προέκταση της ακτίνας OA κύκλου (O, ρ) , παίρνουμε τμήμα $AB = OA$ και φέρνουμε τη $B\Gamma$ κάθετη σε τυχαία εφαπτομένη ε του κύκλου. Ναδειχθεί ότι: $\widehat{OAG} = 3\widehat{AGB}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Δύο κύκλοι (K, ρ) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο A . Φέρνουμε μια χορδή AB του κύκλου (K, ρ) και τη χορδή $AG \perp AB$ του κύκλου (Λ, ρ) . Ναδειχθεί ότι $B\Gamma // K\Lambda$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Σε κύκλο κέντρου O θεωρούμε τη διάμετρο AB , τη χορδή AG και τη διχοτόμο της γωνίας BAG , που τέμνει τον κύκλο στο σημείο M και την $B\Gamma$ στο Δ . Αν η AM τέμνει στο σημείο Z την εφαπτομένη του κύκλου στο B , ναδειχθεί ότι: $\Delta M = MZ$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$, ο περιγεγραμμένος κύκλος του (K, R) και τυχαίο σημείο M του τόξου $B\Gamma$. Να δείχθεί ότι: $MA = MB + M\Gamma$.
(Υπόδειξη: Παίρνουμε στη MA τμήμα $MA = MB$)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. Δύο κύκλοι (K, R) , (Λ, ρ) τέμνονται στα σημεία A και B . Μία κοινή εφαπτομένη τους εφάπτεται των κύκλων στα Γ και Δ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι: $\hat{\Gamma A \Delta} + \hat{\Gamma B \Delta} = 180^\circ$.

.....

.....

.....

.....

.....

- [illegible]

- [illegible]

9. Στον κύκλο (O, ρ) παίρνουμε τις χορδές $AB = AG$ και φέρνουμε από το A ευθεία, που τέμνει τον κύκλο στο E και τη $B\Gamma$ στο Δ . Ναδειχθεί ότι η AB είναι εφαπτομένη του κύκλου, που περνάει από τα σημεία B, Δ, E .

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

- 10.** Δύο κύκλοι με κέντρα K και Λ τέμνονται στα σημεία A και B . Φέρνουμε τις διαμέτρους $AK\Gamma$ και $\Lambda\Lambda\Delta$ και τις χορδές $\Gamma Z // \Delta E$. Ναδειχθεί ότι τα σημεία Z, A, E είναι συνευθειακά.

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

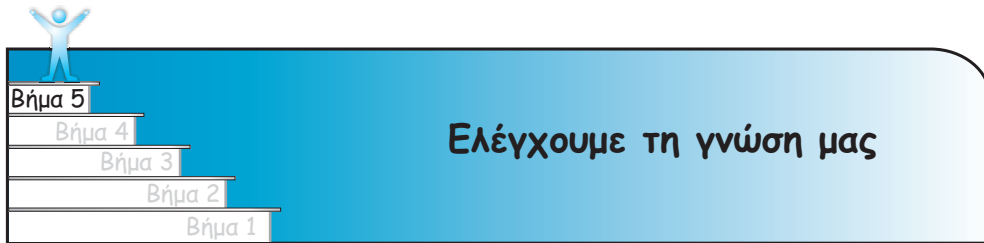
- [illegible]

- [illegible]

[illegible]

- 13.** Οι πλευρές AB και $ΓΔ$ εγγεγραμμένου τετραπλεύρου $ABΓΔ$ τέμνονται στο E και οι πλευρές $AΔ$ και $BΓ$ στο Z . Η διχοτόμος της γωνίας E τέμνει τις $BΓ$, $AΔ$ στα σημεία K , M και η διχοτόμος της $\hat{Z}$ τέμνει τις πλευρές $ΓΔ$ και AB , στα Λ , P . Να δείξετε ότι:
- α. Οι διχοτόμοι των E και Z τέμνονται κάθετα
β. Το τετράπλευρο $KAMP$ είναι ρόμβος

[illegible]



Θέμα 1°

- A. Να δείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο. *(Μονάδες 12)*
- B. Να δείξετε ότι η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής. *(Μονάδες 13)*

Θέμα 2°

- A. Οι κορυφές τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) είναι σημεία του κύκλου (K, ρ) . Να δείξετε ότι, η γωνία των εφαπτόμενων του κύκλου αυτού, στα σημεία A και Γ, είναι ίση με τη γωνία των ευθειών $A\Delta$ και $B\Gamma$. *(Μονάδες 16)*
- B. Να δειχθεί ότι κάθε εγγεγραμμένο τραπέζιο είναι ισοσκελές. *(Μονάδες 9)*

Θέμα 3°

- A. Δύο κύκλοι, τέμνονται στα σημεία B και Δ. Ευθεία, που περνάει από το B τέμνει τους κύκλους στα σημεία A και Γ. Οι ευθείες $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$ τέμνουν αντίστοιχα τους κύκλους στα E και Z και οι ευθείες AZ , ΓE τέμνονται στο H. Να δείξετε, ότι το τετράπλευρο ΔEHZ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. *(Μονάδες 13)*
- B. Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, ρ) . Φέρνουμε την εφαπτομένη $A\chi$ και ευθεία $\varepsilon \parallel A\chi$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ και την AB στο E. Να δείξετε ότι το $B\Gamma\Delta E$ είναι εγγράψιμο. *(Μονάδες 12)*

Θέμα 4°

- A. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B. Από τα A και B, φέρνουμε ευθείες που τέμνουν τον έναν κύκλο στα Γ και Γ' και τον άλλον στα Δ και Δ'. Να δειχθεί ότι $\Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$. *(Μονάδες 13)*
- B. Από ένα σημείο I του ύψους $A\Delta$ τριγώνου $AB\Gamma$, φέρνουμε τα τμήματα IK και IL κάθετα στις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma K L$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. *(Μονάδες 12)*

**Συζητήθηκαν
Μελετήθηκαν
Δοκιμάστηκαν**

*ΜΙΑ ΙΔΕΑ - ΕΝΑ ΟΡΑΜΑ
Ξεκάθαρος Στόχος
Ποιότητα στην Εκπαίδευση*

ΚΑΘΙΕΡΩΘΗΚΑΝ τα βιβλία της χρονιάς !!!

Από **130** Πανελλαδικά Συνεργαζόμενα Φροντιστήρια
και **300** Συγγραφείς - Καθηγητές



ΠΑ.ΣΥ.Φ
www.syn.fro.gr

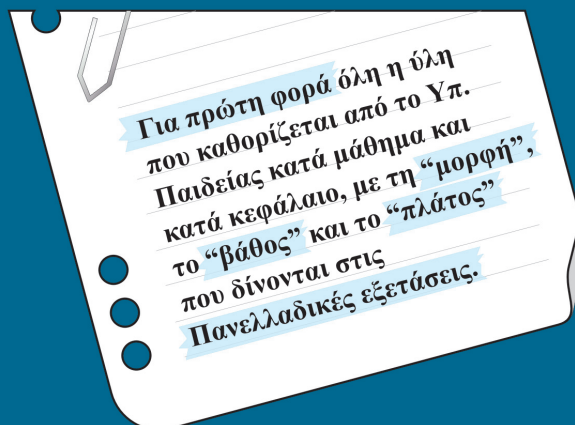
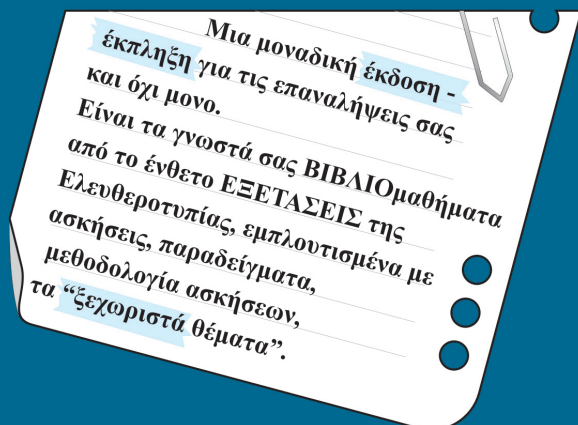
Εκπαίδευση Κύρους

για επιτυχία στις καλύτερες
σχολές των Α.Ε.Ι

Για το καθημερινό σας διάβασμα χρησιμοποιήστε:

**I. ΒΙΒΛΙΟμαθήματα
για Γυμνάσιο - Λύκειο**

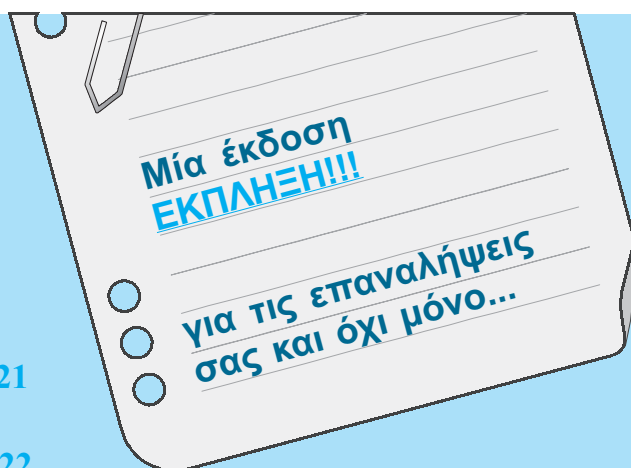
**II. Θέματα προσομοίωσης
& Κριτήρια Αξιολόγησης**



ΖΗΤΗΣΤΕ ΤΑ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΑ

Τηλέφωνο παραγγελιών για βιβλιοπωλεία: Κοκοτσάκης, 210 38.04.347
Εκδοτικές ΤΟΜΕΣ - ΟΡΟΣΗΜΟ

ΒΙΒΛΙΟ μαθήματα



1. ΦΥΣΙΚΗ Α΄ Λυκείου **Κωδ. 21**
2. ΧΗΜΕΙΑ Α΄ Λυκείου **Κωδ. 22**
3. ΦΥΣΙΚΗ Θετικής - Τεχν/κής Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου **Κωδ. 30**
4. ΧΗΜΕΙΑ Θετικής Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου **Κωδ. 31**
5. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Θετικής - Τεχν/κής Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου **Κωδ. 32**
6. ΦΥΣΙΚΗ Γενικής Παιδείας Β΄ Λυκείου **Κωδ. 33**
7. ΑΛΓΕΒΡΑ Γενικής Παιδείας Β΄ Λυκείου **Κωδ. 34**
8. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Γενικής Παιδείας Β΄ Λυκείου **Κωδ. 35**
9. ΦΥΣΙΚΗ Θετικής - Τεχν/κής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου **Κωδ. 36**
10. ΧΗΜΕΙΑ Θετικής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου **Κωδ. 37**
11. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Θετικής - Τεχν/κής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου **Κωδ. 38**
12. ΦΥΣΙΚΗ Γενικής Παιδείας Γ΄ Λυκείου **Κωδ. 39**
13. ΑΡΧΑΙΑ Θεωρητικής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου
(Θουκιδίδη Περικλέους Επιτάφιος) **Κωδ. 52**

Το “αντίδοτο” για την... αμνησία την ώρα των εξετάσεων
είναι η σωστή επανάληψη.