

Θέματα Γεωμετρίας Α' Λυκείου

2008

ΘΕΜΑ II

Δίνονται ευθεία ϵ και τα διαδοχικά σημεία της A, B, Γ με $AB < B\Gamma$. Στο σημείο B φέρουμε κάθετη ημιευθεία προς την ϵ , και πάνω σ' αυτήν τα σημεία Δ και E με $B\Delta = AB$ και $BE = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $AE = \Gamma\Delta$

μονάδες 12

β) $AE \perp \Gamma\Delta$

μονάδες 13

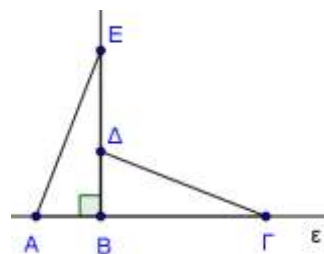
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ABE και $B\Gamma\Delta$ έχουν:

1) $AB = B\Delta$ και

2) $BE = B\Gamma$,

δηλαδή οι κάθετες πλευρές τους είναι μία προς μία ίσες, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AE = \Gamma\Delta$.



β) Έστω Z το σημείο τομής των $\Gamma\Delta$ και AE .

Θα αποδείξουμε ότι $Z = 90^\circ$ και για το λόγο αυτό

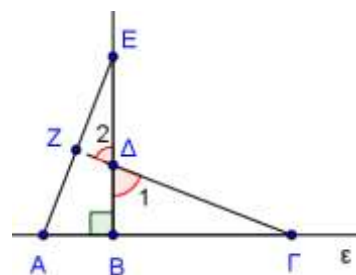
θα υπολογίσουμε το άθροισμα των γωνιών Δ_2 και

E . Είναι $\Delta_2 = \Delta_1$ ως κατακορυφήν και $\Delta_1 = A$ γιατί τα τρίγωνα ABE και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα, άρα:

$$\Delta_2 + E = A + E$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου

ABE έχουμε ότι $A + E = 90^\circ$, άρα και $\Delta_2 + E = 90^\circ$, οπότε στο τρίγωνο ΔZE είναι και $Z = 90^\circ$, άρα $AE \perp \Gamma\Delta$.



ΘΕΜΑ III

Δίνεται κύκλος (O, ρ) , μια διάμετρος του AB και μία χορδή AG που σχηματίζει με την AB γωνία 30° . Στο Γ φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου η οποία τέμνει την προέκταση της AB στο Δ . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

μονάδες 13

β) $B\Delta = \rho$

μονάδες 12

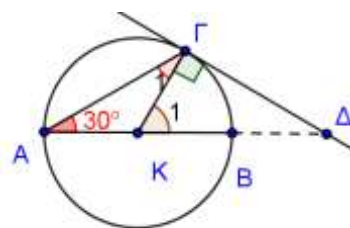
Λύση

α) Επειδή τα τμήματα AK και $K\Gamma$ είναι ακτίνες του κύκλου, είναι ίσα, οπότε το τρίγωνο KAG είναι ισοσκελές και $\Gamma_1 = A = 30^\circ$.

Η γωνία K_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο KAG , οπότε $K_1 = \Gamma_1 + A = 60^\circ$.

Επειδή η $\Gamma\Delta$ είναι εφαπτομένη του κύκλου, είναι κάθετη στην ακτίνα $K\Gamma$, οπότε $K\Gamma\Delta = 90^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $K\Gamma\Delta$ προκύπτει ότι $\Delta = 30^\circ$, οπότε το



τρίγωνο ΑΓΔ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές.

- β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΓΔ είναι $\Delta = 30^\circ$, άρα $ΚΓ = \frac{ΚΔ}{2}$, όμως $ΚΓ = ρ$, άρα $ΚΔ = 2ρ$. Επειδή $ΚΒ = ρ$ και $ΚΔ = 2ρ$, είναι και $ΒΔ = ρ$.

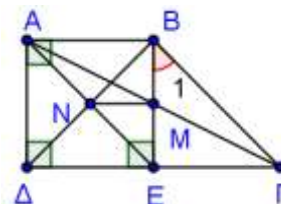
ΘΕΜΑ IV

Έστω ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) με $\angle A = \angle \Delta = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $B = 3\Gamma$. Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει την ΑΓ στο Μ. Έστω Ν το σημείο τομής της ΑΕ με την ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:

- | | |
|------------------------------------|-----------|
| α) $\Gamma = 45^\circ$ | μονάδες 6 |
| β) Το Μ είναι μέσο του ΒΕ | μονάδες 7 |
| γ) $AE = BD$ | μονάδες 6 |
| δ) $NM = \frac{1}{4} \Delta\Gamma$ | μονάδες 6 |

Λύση

- α) Οι γωνίες ΑΒΓ και Γ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από τη ΒΓ, άρα $\angle AB\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 3\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 4\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 45^\circ$ οπότε $\angle AB\Gamma = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$



Επειδή $BE \perp \Delta\Gamma$ και $\Delta\Gamma \parallel AB$ είναι και $BE \perp AB$, δηλαδή $\angle ABE = 90^\circ$, οπότε

$\angle B_1 = 45^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΒΕΓ έχουμε:

$$45^\circ + 90^\circ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 45^\circ$$

- β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο, οπότε $AB = DE$. Όμως $\Delta\Gamma = 2AB$, άρα και $\Gamma E = AB$. Επειδή τα τμήματα ΑΒ και ΓΕ είναι ίσα και παράλληλα, το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. Οι ΒΕ, ΑΓ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΕ, οπότε διχοτομούνται στο Μ, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΒΕ.
- γ) Τα ΑΕ και ΒΔ είναι διαγώνιες του ορθογωνίου ΑΒΕΔ, οπότε είναι ίσες.
- δ) Οι διαγώνιες ΑΕ και ΒΔ του ΑΒΕΔ διχοτομούνται στο Ν, δηλαδή το Ν είναι μέσο του ΑΕ. Στο τρίγωνο ΑΕΓ τα Μ, Ν είναι μέσα δύο πλευρών, άρα

$$MN = \frac{EG}{2} = \frac{\frac{\Delta\Gamma}{2}}{2} = \frac{1}{4} \Delta\Gamma$$

2009

ΘΕΜΑ II

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B = 2\Gamma < 90^\circ$, το ύψος του ΑΔ και Μ το μέσο της ΑΓ. Προεκτείνουμε την ΜΔ μέχρι να συναντήσει την ευθεία ΑΒ στο Ε. Δείξτε ότι

- | | |
|--------------------------|------------|
| α) $AB\Delta = AM\Delta$ | μονάδες 12 |
| β) $BE = BD$ | μονάδες 13 |

Λύση

- α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ η ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $\Delta M = \frac{A\Gamma}{2} = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΔΜΓ

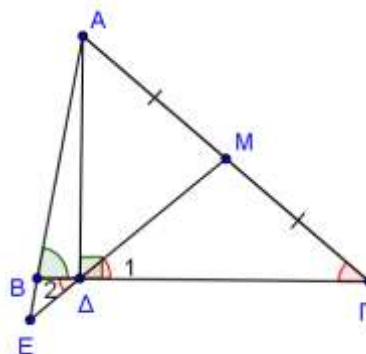
είναι ισοσκελές και έχει $\Delta_1 = \Gamma$.

Η γωνία ΑΜΔ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΓ, οπότε $\Delta_1 = \Delta_2 = \Gamma$.

- β) Επειδή $\Delta_1 = \Delta_2$ ως κατακορυφήν και $\Delta_1 = \Gamma$ είναι και $\Delta_2 = \Gamma$.

Η γωνία ΑΒΔ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΕΔ, άρα

$\Delta_2 = E + \Gamma \Leftrightarrow 2\Gamma = E + \Gamma \Leftrightarrow E = \Gamma$, άρα $E = \Delta_2$, οπότε το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ισοσκελές και έχει $BE = BD$.



ΘΕΜΑ ΙΙΙ

Δίνεται το ισοσκελές οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Φέρουμε το ύψος ΒΔ και από το Δ την κάθετη προς την ΑΒ η οποία συναντά την πλευρά ΑΒ στο Ε και την προέκταση της ΒΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι:

- α) $BD = AZ$

- β) $BD > GZ$

μονάδες 12

μονάδες 13

Λύση

- α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ είναι

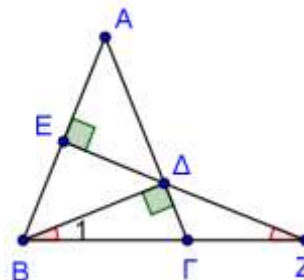
$$B_1 + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow B_1 = 90^\circ - \Gamma$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΖ είναι

$$Z + B = 90^\circ \Leftrightarrow Z = 90^\circ - B$$

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ισχύει ότι

$B = \Gamma$ άρα και $B_1 = Z$, οπότε το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές με $BD = AZ$.



- β) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο είναι $\Gamma < 90^\circ$, οπότε $\Gamma_{\text{εξ}} > 90^\circ$.

Στο τρίγωνο ΓΔΖ η πλευρά ΔΖ βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία, άρα $\Delta Z > \Gamma Z$, οπότε και $BD > \Gamma Z$.

ΘΕΜΑ ΙV

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με $AB > BG$, τέτοιο ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60° . Από το Δ φέρουμε $\Delta M \perp AG$.

- α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το Μ είναι το μέσο του ΑΟ, όπου Ο είναι το κέντρο του ορθογωνίου.

μονάδες 8

ii. $AG = 4AM$.

μονάδες 7

- β) Αν από το Γ φέρουμε $GN \perp BD$, να αποδείξετε ότι το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

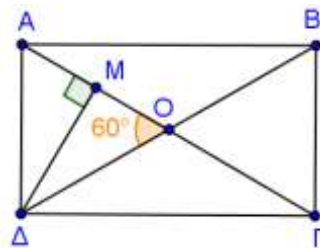
μονάδες 10

Λύση

α) i. Επειδή τα ΑΓ, ΒΔ είναι διαγώνιες του ορθογωνίου, είναι ίσες, οπότε και ΟΑ = ΟΔ ως μισά των διαγωνίων.

Το τρίγωνο ΟΑΔ είναι ισοσκελές και έχει $\angle O = 60^\circ$, άρα είναι ισόπλευρο, οπότε το ύψος του ΔΜ είναι και διάμεσός του, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΟΑ.

ii. $ΑΓ = 2ΟΑ = 2 \cdot 2ΑΜ = 4ΑΜ$



β) Επειδή $ΟΒ = \frac{ΒΔ}{2} = \frac{ΑΓ}{2} = ΟΓ$ και $\angle O = 60^\circ$, το

τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο, οπότε το ύψος του ΓΝ είναι και διάμεσος.

Στο τρίγωνο ΟΑΒ τα Μ, Ν είναι μέσα δύο πλευρών άρα $MN \parallel AB$. Επειδή $AB \parallel \Gamma\Delta$, είναι και $MN \parallel \Gamma\Delta$ (1).

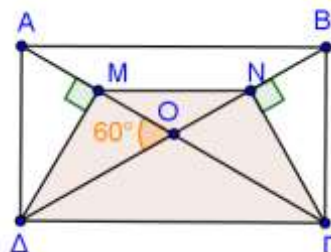
Επειδή $ΜΔ \perp ΑΓ$ και $ΓΝ \perp ΒΔ$, αν οι ΔΜ και ΓΝ ήταν παράλληλες τότε και οι ΑΓ, ΒΔ θα ήταν παράλληλες που είναι άτοπο, άρα οι ΔΜ και ΓΝ δεν είναι παράλληλες και τέμνονται (2).

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΜΔ και ΟΝΓ έχουν:

$$1) \quad ΟΔ = \frac{ΒΔ}{2} = \frac{ΑΓ}{2} = ΟΓ \text{ και}$$

2) $\angle ΜΟΔ = \angle ΝΟΓ = 60^\circ$, άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσές τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα, άρα έχουν και $ΔΜ = ΓΝ$ (3).

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει ότι το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



2010

ΘΕΜΑ II

Θεωρούμε κύκλο κέντρου Κ και ένα εξωτερικό σημείο του Ρ, από το οποίο φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Ο κύκλος τέμνει το ΡΚ σε σημείο Λ μεταξύ Ρ και Κ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα.

Δείξτε ότι:

α) το τρίγωνο ΡΜΝ είναι ισοσκελές.

β) $ΜΑ = ΝΒ$.

γ) η περίμετρος του τριγώνου ΡΜΝ ισούται με $ΡΑ + ΡΒ$.

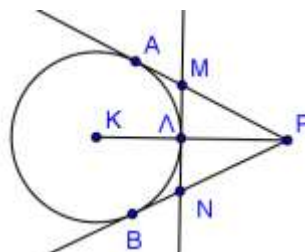
μονάδες 9

μονάδες 7

μονάδες 9

Λύση

α) Επειδή η ΜΝ είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ, είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΛ. Γνωρίζουμε ότι η διακεντρική ευθεία ΡΚ διχοτομεί τη γωνία ΑΡΒ των εφαπτομένων, οπότε στο τρίγωνο ΡΜΝ το ΡΛ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



β) Επειδή τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν

είναι ίσα, τα τμήματα PA και PB είναι ίσα. Επίσης $PM = PN$, άρα και $PA - PM = PB - PN \Leftrightarrow MA = NB$

γ) Τα MA και MB είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το M προς τον κύκλο, οπότε είναι ίσα. Όμοια και τα NA και NB είναι ίσα.

Για τη περίμετρο του PMN έχουμε:

$$PM + PN + MN = PM + PN + (MA + NB) = PM + PN + (MA + NB) = (PM + MA) + (PN + NB) = PA + PB$$

ΘΕΜΑ III

Οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ έχει τη γωνία B διπλάσια από τη γωνία Γ. Φέρουμε το ύψος AD και παίρνουμε σημείο E στο ΔΓ τέτοιο ώστε $BD = DE$.

α) Δείξτε ότι τα τρίγωνα ABE και AGE είναι ισοσκελή.

μονάδες 8

β) Δείξτε ότι $AB + BD = DG$.

μονάδες 9

γ) Αν το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $GB = GA$, υπολογίστε τα μέτρα των γωνιών του.

μονάδες 8

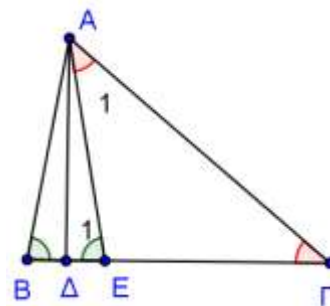
Λύση

α) Το AD είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ABE,

άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε $B = E_1$ και $AB = AE$.

Η γωνία E_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο AEG, άρα

$E_1 = A_1 + \Gamma \Leftrightarrow 2\Gamma = A_1 + \Gamma \Leftrightarrow A_1 = \Gamma$ άρα το τρίγωνο AEG είναι ισοσκελές.



β) Είναι $AB = AE$ και $BD = DE$, άρα

$$AB + BD = AE + DE$$

Όμως $AE = EG$ αφού το τρίγωνο AEG είναι ισοσκελές, άρα

$$AB + BD = AE + DE = EG + DE = DG$$

γ) Αν το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $GB = GA$, τότε $BAG = B = 2\Gamma$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ABΓ έχουμε:

$$BAG + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma + 2\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 5\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$$

$$\text{Τότε } BAG = B = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$$

ΘΕΜΑ IV

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και M το μέσον της BΓ. Προεκτείνουμε την ΔM προς το μέρος του M κατά $ME = DM$. Δείξτε ότι

α) $BE \parallel DG$

μονάδες 6

β) A, B, E συνευθειακά.

μονάδες 6

γ) Αν N το σημείο τομής των ΔB και AM τότε $AN = 2NB$.

μονάδες 7

δ) Αν η προέκταση του EN τέμνει την AD στο Θ, τότε $AO = OD$.

μονάδες 6

Λύση

α) Επειδή $\Delta M = ME$ και $BM = MG$, οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $\Delta Γ Ε Β$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Άρα $BE \parallel \Delta \Gamma$.

β) Επειδή $BE \parallel \Delta \Gamma$ και $AB \parallel \Delta \Gamma$, είναι και $AB \parallel BE$, άρα τα σημεία A, B, E είναι συνευθειακά.

γ) Επειδή τα $A \Gamma, B \Delta$ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου $AB \Gamma \Delta$ διχοτομούνται στο O . Στο τρίγωνο $AB \Gamma$ οι BO και AM είναι διάμεσοί του που τέμνονται στο N , άρα το N είναι βαρύκεντρο

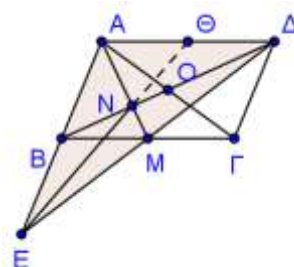
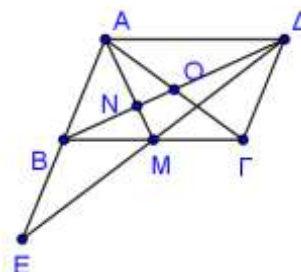
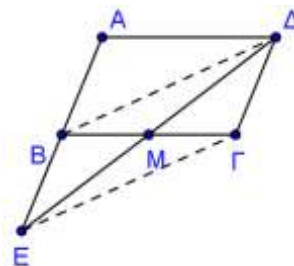
του τριγώνου, οπότε $BN = \frac{2}{3} BO$, όμως

$$BO = \frac{1}{2} B\Delta, \text{ άρα } BN = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} B\Delta = \frac{1}{3} B\Delta \quad (1).$$

$$\Delta N = \Delta O + ON = \frac{1}{2} B\Delta + \frac{1}{3} BO = \frac{1}{2} B\Delta + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} B\Delta = \frac{3}{6} B\Delta + \frac{1}{6} B\Delta = \frac{4}{6} B\Delta = \frac{2}{3} B\Delta \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\Delta N = 2NB$.

δ) Στο τρίγωνο $A \epsilon \Delta$ τα $AM, \Delta B$ είναι διάμεσοι που τέμνονται στο N , άρα το N είναι βαρύκεντρο του τριγώνου, οπότε και η $E \Theta$ είναι διάμεσός του, δηλαδή το Θ είναι μέσο του $A \Delta$.



2011

ΘΕΜΑ II

Σε τρίγωνο $AB \Gamma$ φέρνουμε το ύψος $A \Delta$. Αν M και N είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A \Gamma$ αντιστοίχως, να δείξετε:

α) $\angle A = \angle M \Delta N$

μονάδες 13

β) Η MN είναι μεσοκάθετη του $A \Delta$.

μονάδες 12

Λύση

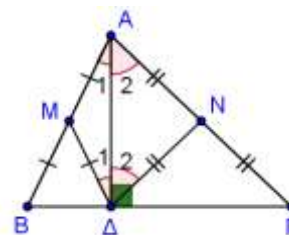
α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A \Delta B$ η ΔM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$$\Delta M = MB = MA = \frac{AB}{2}, \text{ οπότε το τρίγωνο } A M \Delta \text{ είναι}$$

ισοσκελές και έχει $\angle A_1 = \angle \Delta_1$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A \Delta \Gamma$ η ΔN είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$$\Delta N = N \Gamma = NA = \frac{A \Gamma}{2}, \text{ οπότε το τρίγωνο } A N \Delta \text{ είναι ισοσκελές και έχει } \angle A_2 = \angle \Delta_2.$$



Είναι $A = A_1 + A_2 = \Delta_1 + \Delta_2 = M\Delta N$.

β) Επειδή $MA = MD$ και $NA = ND$ τα σημεία M και N ισαπέχουν από τα A και Δ , άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του AD , δηλαδή MN μεσοκάθετος του AD .

β' τρόπος

M, N τα μέσα των πλευρών AB και AG του τριγώνου $AN\Gamma$ άρα $MN \parallel B\Gamma$ οπότε $MN \perp AD$ (αφού $AD \perp B\Gamma$)

ΘΕΜΑ III

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$, $A = 2\Gamma$ και AD διχοτόμος του τριγώνου. Η παράλληλη από το B στην AD τέμνει την προέκταση της GA στο E .

α) Δείξτε ότι $AD = \Delta\Gamma$

μονάδες 8

β) Δείξτε ότι $BE = B\Gamma$

μονάδες 9

γ) Δείξτε ότι $AB = AE$

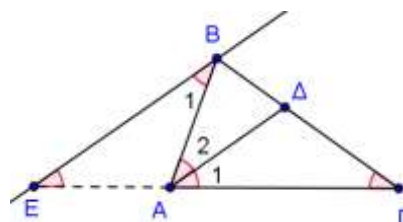
μονάδες 8

Λύση

α) Επειδή η AD είναι διχοτόμος της γωνίας A ,

είναι $A_1 = \frac{A}{2} = \frac{2\Gamma}{2} = \Gamma$, οπότε το τρίγωνο $AD\Gamma$

είναι ισοσκελές και έχει $AD = \Delta\Gamma$.



β) Οι γωνίες E και A_1 είναι ίσες γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων BE και AD που τέμνονται από την EG .

Άρα $E = \Gamma$, οπότε το τρίγωνο BEG είναι ισοσκελές και έχει $BE = B\Gamma$.

γ) Οι γωνίες B_1 και A_2 είναι ίσες γιατί είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων BE και

AD που τέμνονται από την AB , άρα $B_1 = A_2 = \Gamma$. Επειδή είναι και $E = \Gamma$, το τρίγωνο ABE έχει δύο γωνίες ίσες και είναι ισοσκελές με βάση τη BE , άρα $AB = AE$.

ΘΕΜΑ IV

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και η διάμεσος του $\Gamma\Delta$. Από το A φέρνουμε την κάθετη προς τη $\Gamma\Delta$ η οποία τέμνει την υποτεινούσα $B\Gamma$ στο E , και το ύψος AK το οποίο τέμνει την $\Gamma\Delta$ στο σημείο Σ .

Να δείξετε ότι :

i) $AG\Sigma = BAE$

μονάδες 9

ii) $A\Sigma = BE$

μονάδες 10

iii) $B\Gamma = 3EB$

μονάδες 6

Λύση

i) Οι γωνίες $\angle \Gamma \Sigma$ και $\angle \text{BAE}$ είναι οξείες με πλευρές κάθετες ($\text{AG} \perp \text{AB}$ και $\text{GD} \perp \text{AE}$), άρα είναι ίσες.

ii) Επειδή το τρίγωνο ABG είναι ορθογώνιο και ισοσκελές οι γωνίες B, Γ της βάσης του είναι 45° .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο AKG είναι

$$\angle \text{KAG} + \angle \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \angle \text{KAG} = 45^\circ$$

Τα τρίγωνα GSA και AEB έχουν:

1) $\text{AB} = \text{AG}$ (γιατί το τρίγωνο ABG είναι ορθογώνιο στο A και ισοσκελές)

2) $\angle \text{AGS} = \angle \text{BAE}$ και

3) $\angle \text{KAG} = \angle \text{B} = 45^\circ$,

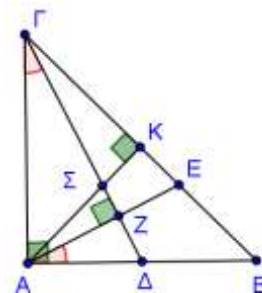
άρα λόγω του κριτηρίου ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\text{AS} = \text{BE}$.

iii) Στο τρίγωνο ABG οι GD, AK είναι διάμεσοί του που τέμνονται στο Σ , άρα το

σημείο αυτό είναι βαρύκεντρο του τριγώνου, οπότε $\text{AS} = \frac{2}{3} \text{AK}$. Όμως η AK είναι

διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ABG , άρα

$$\text{AK} = \frac{1}{2} \text{BG}, \text{ οπότε } \text{BE} = \text{AS} = \frac{2}{3} \text{AK} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \text{BG} = \frac{1}{3} \text{BG} \Leftrightarrow \text{BG} = 3\text{EB}.$$



2012

ΘΕΜΑ II

Δίνεται τετράγωνο ABGΔ και H μέσον της ΓΔ . Προεκτείνουμε τη διαγώνιο AG προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\text{GE} = \text{AG}$. Αν η BE τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο Z να αποδείξετε ότι :

α) $\text{GZ} = \frac{\text{AΔ}}{2}$

μονάδες 6

β) τα τρίγωνα GZE και AHG είναι ίσα.

μονάδες 7

γ) $\text{AZ} \parallel \text{HE}$

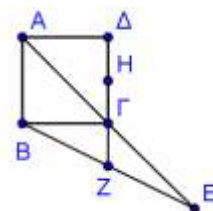
μονάδες 6

δ) το τετράπλευρο ABZH είναι παραλληλόγραμμο.

μονάδες 6

Λύση

α) Επειδή $\text{AG} = \text{GE}$ το Γ είναι μέσο του AE και η GZ είναι παράλληλη στην AB , οπότε στο τρίγωνο ABE το Z είναι μέσο της BE και ισχύει ότι: $\text{GZ} = \frac{\text{AB}}{2} = \frac{\text{AΔ}}{2}$



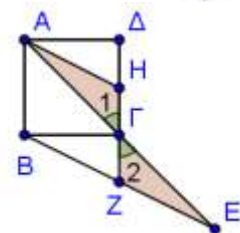
β) Τα τρίγωνα AHG και GZE έχουν:

1) $\text{AG} = \text{GE}$

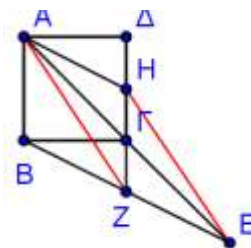
2) $\angle \text{G}_1 = \angle \text{G}_2$ ως κατακορυφήν και

$$3) \text{GZ} = \frac{\text{AB}}{2} = \frac{\text{ΓΔ}}{2} = \text{GH}$$

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



γ) Επειδή $AG = GE$ και $GH = GZ$ οι διαγώνιες του τετράπλευρου $AHEZ$ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Άρα $AZ \parallel HE$.



δ) Επειδή το τετράπλευρο $AHEZ$ είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει ότι $AH \parallel ZE$. όμως $ZE = BZ$, άρα $AH \parallel BZ$, οπότε το τετράπλευρο $AHZB$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.

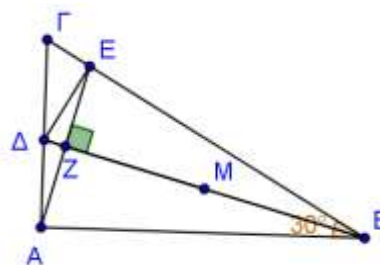
ΘΕΜΑ ΙΙΙ

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, ($A = 90^\circ$) είναι $B = 30^\circ$. Έστω Δ το σημείο στο οποίο η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την AG . Από το A φέρουμε την κάθετη στην $B\Delta$ που τέμνει την $B\Gamma$ στο E . Αν M είναι το μέσον της $B\Delta$ να αποδείξετε ότι:

α) $AB = EB$ μονάδες 8
 β) $\Delta A = \Delta E$ μονάδες 7
 γ) $M\Delta = AE$ μονάδες 10

Λύση

α) Στο τρίγωνο ABE η BZ είναι διχοτόμος και ύψος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε $BA = BE$.



β) Η BZ είναι ύψος και διχοτόμος άρα και διάμεσος του τριγώνου ABE , οπότε η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του AE . Επειδή το Δ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AE , ισαπέχει από τα A και E , δηλαδή $\Delta A = \Delta E$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔDB η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$$AM = \frac{\Delta B}{2} = \Delta M = MB, \text{ άρα το τρίγωνο } \Delta MB$$

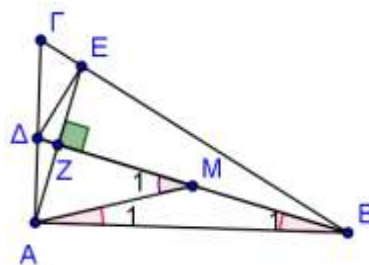
είναι ισοσκελές και έχει $A_1 = B_1$. Όμως

$$B_1 = \frac{B}{2} = 15^\circ, \text{ άρα και } A_1 = 15^\circ.$$

Η γωνία M_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔMB , άρα $M_1 = A_1 + B_1 = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο AZM η γωνία M_1 είναι 30° άρα $AZ = \frac{AM}{2}$. Όμως το Z

είναι μέσο του AE , άρα $\frac{AE}{2} = \frac{M\Delta}{2} \Leftrightarrow AE = M\Delta$.



ΘΕΜΑ IV

Δίνεται ορθή γωνία xOy . Στην πλευρά Ox παίρνουμε τα σημεία A και Δ και στην πλευρά Oy τα σημεία B και Γ έτσι ώστε $OA > OB$ και $OG > OB$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$.

Αν K, Λ είναι τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

α) τα σημεία O, K, Λ είναι συνευθειακά μονάδες 7

β) $KL = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$ μονάδες 8

γ) αν Σ, P τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντιστοίχως, το τετράπλευρο $K\Sigma\Lambda P$ είναι ορθογώνιο. μονάδες 10

Λύση

α) Η OK είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου OAB ,

άρα $OK = KB = \frac{AB}{2}$, άρα το τρίγωνο OKB

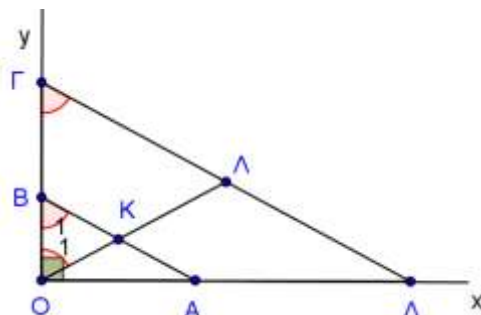
είναι ισοσκελές και $\angle OKB = \angle KBK$ (1).

Η OL είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου $O\Delta\Gamma$

άρα $OL = LG = \frac{\Gamma\Delta}{2}$, οπότε το τρίγωνο $OL\Gamma$

είναι ισοσκελές και έχει $\angle OLG = \angle L\Gamma\Gamma$ (2).

Όμως $\angle KBK = \angle L\Gamma\Gamma$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την OG , άρα λόγω των (1), (2) είναι και $\angle OKB = \angle OLG$. Όμως οι γωνίες αυτές βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της OL , οπότε ταυτίζονται, άρα τα σημεία O, K, Λ είναι συνευθειακά.

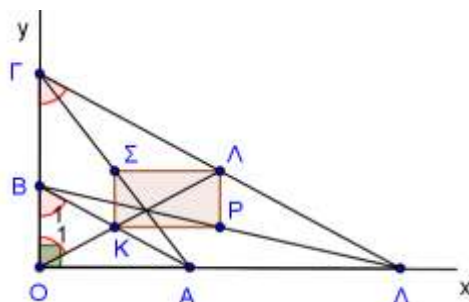


β) Είναι $KL = OL - OK = \frac{\Gamma\Delta}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$

γ) Τα Σ, Λ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $\Gamma A \Delta$, άρα $\Sigma\Lambda \parallel A\Delta$ και $\Sigma\Lambda = \frac{A\Delta}{2}$ (3).

Τα K, P είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο $B A \Delta$, άρα $KP \parallel A\Delta$ και $KP = \frac{A\Delta}{2}$ (4).

Από τις (3), (4) είναι $\Sigma\Lambda = KP$ άρα το τετράπλευρο $K\Sigma\Lambda P$ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες και είναι παραλληλόγραμμο.



ΘΕΜΑ II

Έστω κύκλος κέντρου O και σημείο P εξωτερικό του. Από το P φέρουμε δύο τέμνουσες PAB και $P\Gamma\Delta$ του κύκλου με $PA < PB$, $P\Gamma < P\Delta$ και $PB = P\Delta$. Από το κέντρο του κύκλου φέρουμε τις $OK \perp AB$ και $OL \perp \Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι :

- α) Η OP είναι διχοτόμος της BPA .
 β) $OK = OL$
 γ) $PA = P\Gamma$

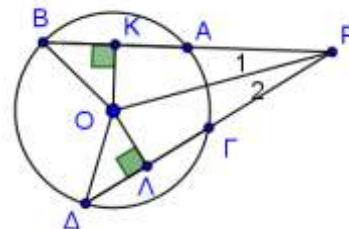
μονάδες 8
 μονάδες 8
 μονάδες 9

Λύση

α) Τα τρίγωνα POB και $PO\Delta$ έχουν:

- 1) $PB = P\Delta$
- 2) PO κοινή
- 3) $OB = O\Delta$ ακτίνες του κύκλου

Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\angle P_1 = \angle P_2$ δηλαδή η PO είναι διχοτόμος της γωνίας P .



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα POK και POL έχουν:

- 1) PO κοινή πλευρά και
- 2) $\angle P_1 = \angle P_2$

δηλαδή οι υποτείνουσές τους είναι ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $OK = OL$.

γ) Τα OK, OL είναι αποστήματα των χορδών AB και $\Gamma\Delta$ και επειδή είναι ίσα και οι χορδές θα είναι ίσες. Είναι

$$\left. \begin{array}{l} PB = P\Delta \\ AB = \Gamma\Delta \end{array} \right\} \xRightarrow{(-)} PB - AB = P\Delta - \Gamma\Delta \Leftrightarrow PA = P\Gamma$$

ΘΕΜΑ III

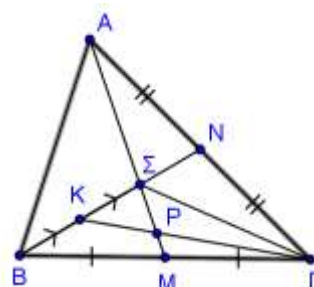
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι διάμεσοί του AM και BN , που τέμνονται στο Σ και K το μέσο του $B\Sigma$.

- α) Αν η ΓK τέμνει το ΣM στο P , να αποδείξετε ότι $PM = \frac{1}{9} AM$. μονάδες 10
 β) Αν η $\Gamma\Sigma$ τέμνει την AB στο Λ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Sigma MK\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο. μονάδες 15

Λύση

α) Στο τρίγωνο $\Sigma B\Gamma$ τα $\Sigma M, \Gamma K$ είναι διάμεσοι, οπότε το σημείο τομής τους P είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου, άρα $PM = \frac{1}{3} \Sigma M$ (1).

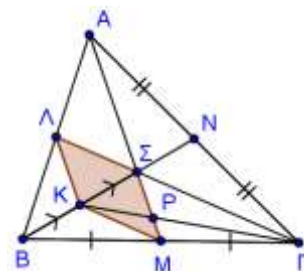
Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα AM, BN είναι διάμεσοι, άρα το σημείο τομής τους Σ είναι βαρύκεντρο του



τριγώνου, άρα $\Sigma M = \frac{1}{3} AM$ (2). Από τις (1), (2) έχουμε:

$$PM = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} AM = \frac{1}{9} AM.$$

β) Τα K, M είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο BΣΓ, άρα $KM \parallel \Sigma\Gamma$ και $KM = \frac{\Sigma\Gamma}{2}$. Όμως επειδή το Σ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου ABΓ, ισχύει ότι $\Sigma\Gamma = 2\Sigma\Lambda$, άρα $KM = \frac{2\Sigma\Lambda}{2} = \Sigma\Lambda$.



Επειδή $KM \parallel \Sigma\Lambda$ το τετράπλευρο ΣΜΚΛ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ IV

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) και ΑΔ το ύψος του. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ABEZ και AΓΗΘ. Αν $EE' \perp B\Gamma$ και $HH' \perp B\Gamma$ και K' η προβολή του μέσου K της EH στη BΓ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $EE' + HH' = B\Gamma$

β) Τα σημεία E, A, H είναι συνευθειακά.

γ) $2KK' = EE' + HH'$

δ) $\angle BKG = 90^\circ$

μονάδες 5

μονάδες 5

μονάδες 5

μονάδες 10

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα HH'Γ και ΓΑΔ έχουν:

1) $H\Gamma = A\Gamma$ πλευρές του τετραγώνου AΓΗΘ

2) $H = \Gamma_1$ γιατί στο ορθογώνιο τρίγωνο HH'Γ είναι

$$H + \Gamma_2 = 90^\circ \Leftrightarrow H = 90^\circ - \Gamma_2 \text{ και}$$

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma_1 = 90^\circ - \Gamma_2$$

(ή οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες)

Άρα στα δύο τρίγωνα οι υποτείνουσές τους είναι ίσες

και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι

ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα είναι ίσα,

οπότε έχουν και $HH' = \Gamma\Delta$ (1)

Τα ορθογώνια τρίγωνα AΔB και BEE' έχουν:

1) $AB = BE$ πλευρές του τετραγώνου ABEZ

2) $A_2 = B_2$ γιατί στο ορθογώνιο AΔB είναι $A_2 = 90^\circ - B_1$ και

$$B_2 + B_1 = 90^\circ \Leftrightarrow B_2 = 90^\circ - B_1$$

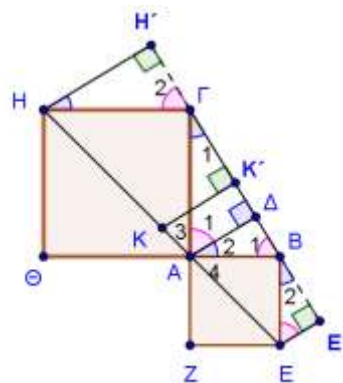
(ή οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες)

Άρα στα δύο τρίγωνα οι υποτείνουσές τους είναι ίσες και μια οξεία γωνία του ενός

τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και

$EE' = B\Delta$ (2)

Είναι $HH' + EE' = \Gamma\Delta + \Delta B = B\Gamma$



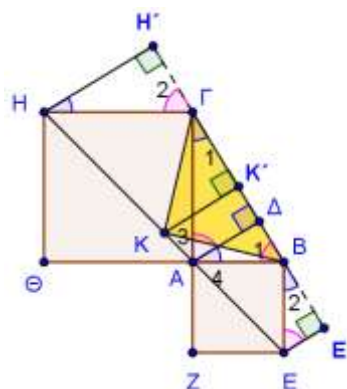
β) Οι ΑΗ και ΑΕ είναι διαγώνιες στα δύο τετράγωνα, άρα είναι και διχοτόμοι των γωνιών του, δηλαδή $A_3 = A_4 = 45^\circ$.
Είναι $HAE = A_3 + \Gamma AB + A_4 = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, άρα τα σημεία Η, Α, Ε είναι συνευθειακά.

γ)

Επειδή $KK' \perp B\Gamma$, $HH' \perp B\Gamma$ και $EE' \perp B\Gamma$ είναι $KK' \parallel HH' \parallel EE'$ και επειδή το Κ είναι μέσο του ΗΕ, η KK' είναι διάμεσος του τραpezίου $HH'E'E$, οπότε

$$KK' = \frac{HH' + EE'}{2} \Leftrightarrow HH' + EE' = 2KK'$$

δ) Επειδή $HH' + EE' = B\Gamma$, είναι $KK' = \frac{B\Gamma}{2}$, δηλαδή στο τρίγωνο $KB\Gamma$ μια διάμεσός του είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη πλευρά αυτή, δηλαδή $BK\Gamma = 90^\circ$.



2014

ΘΕΜΑ II

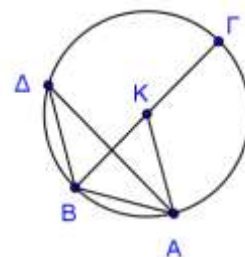
Έστω κύκλος κέντρου Κ, μια διάμετρός του $B\Gamma$ και σημείο Α του κύκλου τέτοιο ώστε $BA = K\Gamma$. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των Β και Γ,

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο, μονάδες 7

β) να υπολογίσετε την γωνία $B\Delta A$, μονάδες 9

γ) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. μονάδες 9

Λύση



α) Είναι $BA = K\Gamma = \rho = BK = KA$, άρα το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο.

β) Επειδή το τρίγωνο BKA είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του είναι ίσες με 60° , άρα $BKA = KBA = KAB = 60^\circ$.

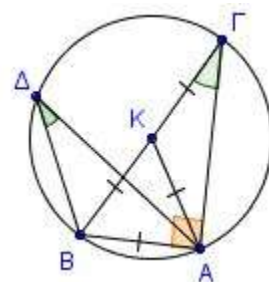
Η γωνία $B\Delta A$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο AB με αντίστοιχη επίκεντρη τη γωνία BKA , άρα

$$B\Delta A = \frac{BKA}{2} = 30^\circ.$$

γ) Η γωνία $B = 60^\circ$ επειδή είναι γωνία του ισοπλεύρου BKA .

Η γωνία Γ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο AB , όπως και η $B\Delta A$, άρα

$$\Gamma = B\Delta A = 30^\circ.$$



Τέλος η γωνία $\angle B\Delta\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, οπότε είναι ορθή.

ΘΕΜΑ III

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB=2\Delta\Gamma$. Αν K, Λ, M μέσα των $AD, AB, B\Gamma$ αντίστοιχα και P το σημείο τομής των AM και $\Delta\Lambda$, να αποδείξετε ότι:

α) $KM = \frac{3\Gamma\Delta}{2}$

μονάδες 5

β) $\Delta\Gamma B\Lambda$ παραλληλόγραμμο

μονάδες 6

γ) $AP=PM$

μονάδες 6

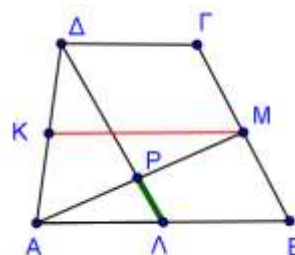
δ) $\Delta P=3P\Lambda$

μονάδες 8

Λύση

α) Η KM είναι διάμεσος του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$, άρα

$$KM = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{2\Gamma\Delta + \Gamma\Delta}{2} = \frac{3\Gamma\Delta}{2}$$



β) Είναι $B\Lambda = \frac{AB}{2} = \Gamma\Delta$ και $B\Lambda \parallel \Gamma\Delta$, άρα το τετράπλευρο

$\Delta\Gamma B\Lambda$ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Επειδή το $\Delta\Gamma B\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο είναι $\Delta\Lambda \parallel B\Gamma$.

Στο τρίγωνο ABM το Λ είναι μέσο της AB και $\Delta P \parallel BM$, άρα το P είναι μέσο της AM , δηλαδή $AP = PM$.

δ) Είναι $P\Lambda = \frac{BM}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$. Όμως $B\Gamma = \Delta\Lambda$, άρα $P\Lambda = \frac{\Delta\Lambda}{4}$ κατά συνέπεια είναι

$$\Delta P = 3 \frac{\Delta\Lambda}{4}, \text{ οπότε } \Delta P = 3P\Lambda.$$

ΘΕΜΑ IV

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του AM . Φέρουμε $M\Delta$ κάθετη στην $A\Gamma$ και θεωρούμε H το μέσο του τμήματος $M\Delta$. Από το H φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει τις AM και $A\Gamma$ στα σημεία K και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $HZ = \frac{B\Gamma}{4}$

μονάδες 9

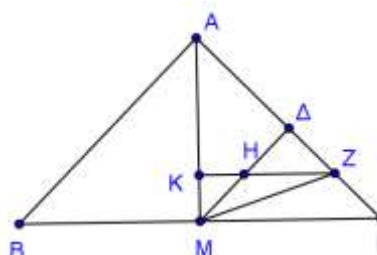
β) $MZ \parallel B\Delta$

μονάδες 8

γ) Η ευθεία AH είναι κάθετη στη $B\Delta$.

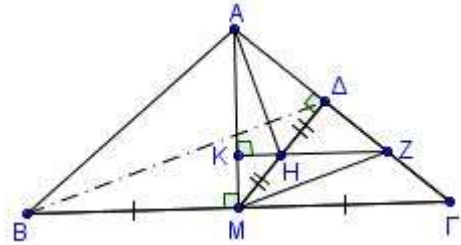
μονάδες 8

Λύση



- α) Το AM είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε είναι και διάμεσος του τριγώνου. Στο τρίγωνο $M\Delta\Gamma$ το H είναι μέσο της $M\Delta$ και $HZ \parallel M\Gamma$, άρα το Z είναι μέσο της $\Delta\Gamma$

$$\text{και ισχύει ότι } HZ = \frac{M\Gamma}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}.$$



- β) Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ τα M, Z είναι μέσα δύο πλευρών, άρα $MZ \parallel B\Delta$.

- γ) Είναι $KZ \parallel B\Gamma$ και $B\Gamma \perp AM$, άρα $KZ \perp AM$.

Στο τρίγωνο AMZ τα $M\Delta, ZK$ είναι ύψη, άρα το σημείο τομής τους, δηλαδή το H , είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Επομένως το AH είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου. Δηλαδή $AH \perp MZ$ και επειδή $MZ \parallel B\Delta$ είναι και $AH \perp B\Delta$.