

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ



1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB=AG$). Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του $BA, ΓA$ (προς το μέρος του A) θεωρούμε ίσα τμήματα AD, AE αντίστοιχα. Αν M το μέσο της βάσης $BΓ$, να αποδείξετε ότι:
- α) $EB=ΔΓ$
 - β) τα σημεία $Δ, E$ ισαπέχουν από τις AG, AB αντίστοιχα.
 - γ) το τρίγωνο $MΔE$ είναι ισοσκελές.
2. Οι διχοτόμοι $BD, ΓE$ ισοσκελούς τριγώνου $ABΓ$ ($AB=AG$) τέμνονται στο Z . Να αποδείξετε ότι:
- α) $BD=EG$
 - β) $ZE=ZΔ$ και $ZB=ZΓ$
 - γ) Η ευθεία AZ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος $BΓ$.
3. Έστω $Δ, E$ τα μέσα των πλευρών AB, AG ισοσκελούς τριγώνου $ABΓ$ ($AB=AG$). Να αποδείξετε ότι:
- α) το τρίγωνο $AΔE$ είναι ισοσκελές.
 - β) τα $Δ, E$ ισαπέχουν από τη βάση $BΓ$ του τριγώνου $ABΓ$.
 - γ) τα $Δ, E$ ισαπέχουν από τις ίσες πλευρές του τριγώνου $ABΓ$.
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ με $AB=AG$ και έστω $K, Λ, M$ τα μέσα των πλευρών AB, AG και $BΓ$ αντίστοιχα. Στις προεκτάσεις των AB, AG θεωρούμε σημεία $Δ, E$ αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $BD=ΓE$. Να αποδείξετε ότι :
- α) τα τρίγωνα KBM και $ΛΓM$ είναι ίσα.
 - β) τα τρίγωνα $BMΔ$ και $ΓME$ είναι ίσα.
 - γ) τα τρίγωνα KML και $AKΛ$ είναι ίσα.
 - δ) τα τρίγωνα $KMΔ$ και $ΛME$ είναι ίσα.
5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ με $AB=AG$ και τα ύψη του $BD, ΓE$. Να αποδείξετε ότι :
- α) Τα τρίγωνα $ABΔ$ και $AGΕ$ είναι ίσα.
 - β) Το τρίγωνο $AΔE$ είναι ισοσκελές
 - γ) Το τμήμα $ΔE$ είναι παράλληλο με τη $BΓ$
6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB=AG$) και έστω $Δ, E$ σημεία της πλευράς $BΓ$ τέτοια, ώστε $BD=ΔE=EG$. Αν M και N τα μέσα των AB και AG αντίστοιχα και K το σημείο τομής των ευθειών $MΔ$ και NE , να αποδείξετε ότι:
- α) το τρίγωνο $AΔE$ είναι ισοσκελές.
 - β) $MΔ=NE$ γ) $MΔA=NEA$
 - δ) το τρίγωνο MNK είναι ισοσκελές.
 - ε) το τρίγωνο $BKΓ$ είναι ισοσκελές.

7. Έστω AD η διχοτόμος της γωνίας A σκαληνού τριγώνου $AB\Gamma$. Αν από το B φέρουμε κάθετη στην AD που τέμνει την $A\Gamma$ στο E , να αποδείξετε ότι:
- α) το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.
 - β) το τρίγωνο BDE είναι ισοσκελές.
 - γ) η DZ είναι διχοτόμος της γωνίας BDE .
8. Έστω AM η διάμεσος και AD το ύψος τριγώνου $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε τις AD, AM κατά ίσα τμήματα DE και MZ αντίστοιχα. Αν K είναι το σημείο τομής των BZ, GE , να αποδείξετε ότι:
- α) $AGB = BGE$ β) $BZ = GE$
 - γ) $BK = KG$ και $KE = KZ$
 - δ) το τρίγωνο MEZ είναι ισοσκελές.
9. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και AD η διχοτόμος της γωνίας A . Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E και από το E παράλληλη προς την $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z . Να δείξετε ότι:
- α) Το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές.
 - β) Το τετράπλευρο $BDEZ$ είναι παραλληλόγραμμο.
 - γ) $BZ = AE$
10. Η γωνία A ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι αμβλεία και ισχύει ότι $A = \Gamma + 120^\circ$. Έστω BD η διχοτόμος της γωνίας B και BE το ύψος του τριγώνου από τη κορυφή B . Να αποδείξετε ότι :
- α) $BDA = 30^\circ$ β) $BD = 2 BE$
 - γ) προεκτείνουμε την BE κατά ίσο τμήμα $EZ = BE$. Να δείξετε ότι BZD είναι ισόπλευρο.
11. Σε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB = 2 AD$. Έστω M, N τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι :
- α) Το τετράπλευρο $AMND$ είναι παραλληλόγραμμο.
 - β) Η DM είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta\Gamma$.
 - γ) Η γωνία $\Gamma M\Delta$ είναι ορθή.
 - δ) Αν η γωνία A είναι ίση με 120° , τότε το τρίγωνο $M\Gamma N$ είναι ισόπλευρο.
12. Έστω M το μέσο της υποτείνουσας $B\Gamma$ ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$. Στη προέκταση της AM προς το μέρος του M θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $M\Delta = AM$. Να αποδείξετε ότι:
- α) $\Gamma\Delta \parallel AB$ β) $AD = B\Gamma$ γ) $AB\Delta\Gamma$ ορθογώνιο

13. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 2 AB$. Έστω M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Στην πλευρά $A\Gamma$ παίρνουμε τα σημεία N και P έτσι ώστε $AN = NP = P\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $MP \parallel BN$

β) Η ευθεία BN διέρχεται από το μέσο του AM

γ) Η BN είναι κάθετη στην AM .

δ) Η γωνία AMP είναι ορθή.

ε) Αν η γωνία $MA\Gamma$ είναι ίση με 30° , τότε $BN = 2P\Gamma$.

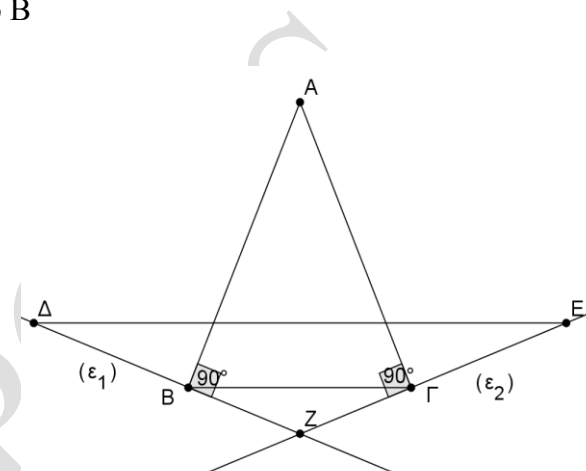
14. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από το B φέρνουμε την ευθεία (ε_1) κάθετη στην AB και από το Γ την (ε_2) κάθετη στην $A\Gamma$ και παίρνουμε πάνω τους τα τμήματα $B\Delta, \Gamma E$ αντίστοιχα, ώστε $B\Delta = \Gamma E$

όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ τέμνονται στο σημείο Z .

α) Να δείξετε ότι τρίγωνο $ABZ =$ τρίγωνο $A\Gamma Z$

β) $BZ = \Gamma Z$

γ) Η AZ είναι μεσοκάθετη του $B\Gamma$ και είναι διχοτόμος της $B\Gamma$



15. Έστω $O\delta$ διχοτόμος γωνίας $\chi O\gamma = 60^\circ$ και ευθεία ε παράλληλη στην $O\chi$ που τέμνει τις $O\gamma$,

$O\delta$ στα σημεία A και B αντίστοιχα. Αν K είναι το μέσο της OB και η AK τέμνει την $O\chi$ στο Γ , τότε:

α) να υπολογίσετε τις γωνίες $\chi O\beta$ και $\beta O\alpha$

β) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τη γωνία OAB .

γ) να αποδείξετε ότι η OK είναι κάθετη στην OB .

δ) να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $O\Gamma B A$ είναι ρόμβος.

16. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο ώστε $AB < A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των BA και ΓA προς το A παίρνουμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι, ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και $AE = AB$. Αν οι ευθείες ΔE και ΓB τέμνονται στο σημείο M , να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E = B\Gamma$

β) τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $ME\Gamma$ είναι ίσα.

γ) η MA είναι διχοτόμος της γωνίας BMA

Έστω Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$).

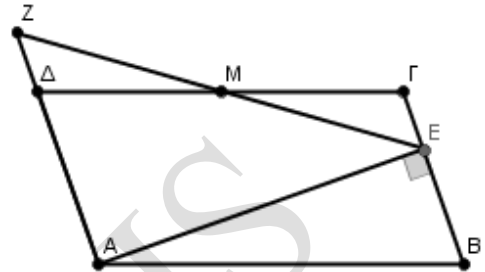
17. Προεκτείνουμε την EZ κατά τμήμα $ZH = EZ$. Να αποδείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο BEHG είναι παραλληλόγραμμο.
- β) το τετράπλευρο AEDZ είναι ορθογώνιο.
- γ) $AD = HZ$.

18. Δίνεται ρόμβος ABΓΔ με κέντρο το σημείο O. Στην προέκταση της AB θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $BE = AB$. Να αποδείξετε ότι:

- α) οι ευθείες ΓΕ και ΒΔ είναι παράλληλες.

- β) $BO = \frac{1}{2} EG$.
- γ) η γωνία ΑΓΕ είναι ορθή.



19. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με $AB = 2BG$. Έστω E η προβολή του A πάνω στην ευθεία ΒΓ, M το μέσο της ΓΔ και Z το σημείο στο οποίο η ευθεία EM τέμνει την προέκταση της ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα ΔΜΖ και ΓΜΕ είναι ίσα
- β) το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ορθογώνιο
- γ) το τρίγωνο ΑΜΖ είναι ισοσκελές
- δ) $AZM = AMΔ$

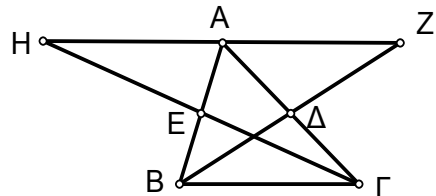
20. Από το έγκεντρο I, τριγώνου ABΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ που τέμνει

τις AB και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

- α) τα τρίγωνα ΒΔΙ και ΙΕΓ είναι ισοσκελή.
- β) $ΔΕ = ΒΔ + ΓΕ$.

21. Προεκτείνουμε τις διαμέσους ΒΔ, ΓΕ τριγώνου ABΓ κατά τμήματα $ΔΖ = ΒΔ$ και $ΕΗ = ΓΕ$. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τετράπλευρα ABΓΖ και ΑΗΒΓ είναι παραλληλόγραμμα.
- β) τα σημεία Η, Α, Ζ είναι συνευθειακά και το Α είναι μέσο του ΗΖ.



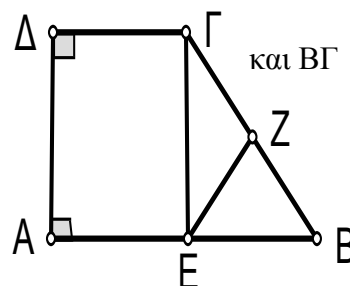
22. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB < AG$. Έστω ΑΔ διχοτόμος της γωνίας Α και έστω ότι η κάθετη ΒΚ στην ΑΔ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

- α) $ΕΓ = ΑΓ - ΑΒ$
- β) $KM = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$ και $KM \parallel ΑΓ$
- γ) $BKM = 90^\circ + \frac{A}{2}$

23. Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος είναι

$A = \Delta = 90^\circ$, $AB = B\Gamma = 2\Gamma\Delta$ και E, Z μέσα των AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο $AE\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.
- β) $B = 60^\circ$
- γ) $AZ \perp B\Gamma$
- δ) το τετράπλευρο $\Delta EZ\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



24. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με $\Gamma = 30^\circ$ και η διάμεσος AM . Η μεσοκάθετος της $B\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ . Προεκτείνουμε την ΓA κατά $AE = A\Delta$ και έστω Z το κοινό σημείο των BE, AM . Να αποδείξετε ότι:

- α) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της $A\hat{B}\Gamma$
- β) Το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισόπλευρο.
- γ) $EB = 2M\Delta$ δ) $EZ = AE$ ε) $BZ = A\Gamma$

25. Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $\hat{A}, \hat{A'} > 90^\circ$ και $AB = A'B'$. Αν $A\Delta = A'\Delta'$ και $BE = B'E'$ (όπου $A\Delta, BE$ και $A'\Delta', B'E'$ ύψη των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ αντίστοιχα), να δείξετε ότι

- α) τα τρίγωνα ABE και $A'B'E'$ είναι ίσα,
- β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A'B'\Delta'$ είναι ίσα
- γ) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα

26. Έστω το ισοσκελές τρίγωνο ΔEZ ($\Delta E = \Delta Z$) και M το μέσο της EZ . Παίρνουμε

σημείο A της ΔE και σημείο B της ΔZ έτσι ώστε $\Delta A = \frac{1}{4}\Delta E$ και $\Delta B = \frac{1}{4}\Delta Z$.

Να δείξετε ότι :

- A) το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές.
- B) τα A, B ισαπέχουν από τη EZ .

27. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και τη διχοτόμο του $A\Delta$.

Προεκτείνουμε το ύψος του AK κατά τμήμα $KE = AK$. Να αποδείξετε ότι :

- i. τα τρίγωνα ABE , $A\Delta E$ και $A\Gamma E$ είναι ισοσκελή
- ii. τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ είναι ίσα
- iii. η $E\Delta$ είναι διχοτόμος του τριγώνου $BE\Gamma$.

28. Θεωρούμε το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Προεκτείνουμε την $B\Gamma$ προς την πλευρά του B κατά $B\Delta$ και προς την πλευρά του Γ κατά ΓE έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Επιπλέον, προεκτείνουμε την AB κατά BZ και την $A\Gamma$ κατά ΓH έτσι ώστε $BZ = \Gamma H$. Να αποδείξετε ότι:

- A) $\Delta Z = EH$.
- B) τα τρίγωνα $\Gamma\Delta Z$ και BEH είναι ίσα

29. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $\hat{\Gamma} = 2\hat{B}$. Στο μέσο K της υποτεινούσας $B\Gamma$ φέρνουμε μία ευθεία κάθετη στη $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο σημείο Δ .

- α) Να δείξετε ότι $\hat{B} = 30^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma\Delta B$ είναι ισοσκελές με $\Delta B = \Delta\Gamma$.
- γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta B\Gamma$ είναι ίσα.

30. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Πάνω στη $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Delta\Delta = AB$ και στην προέκταση της AB σημείο E τέτοιο ώστε $AE = A\Gamma$.

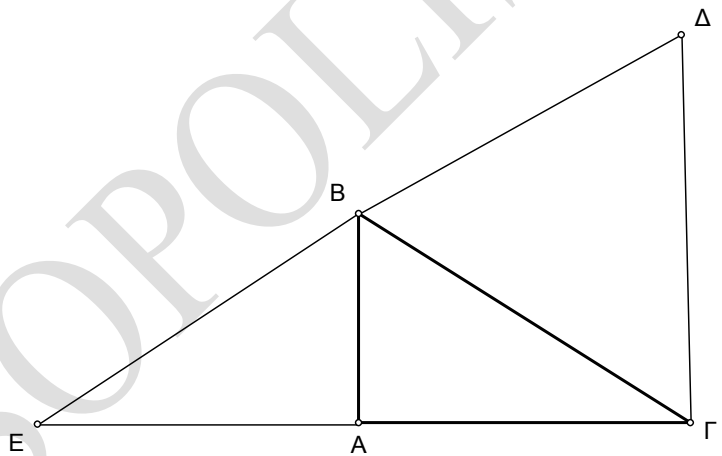
Αν P είναι το σημείο τομής των $B\Gamma$ και $E\Delta$, τότε :

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AE\Delta$ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι $BP = P\Delta$

31. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Έξω από αυτό κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$. Αν οι ΔB και ΓA τέμνονται στο E , να δείξετε ότι:

- α) $AB \parallel \Gamma\Delta$
- β) Το σημείο A είναι μέσο του τμήματος $E\Gamma$.



32. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα σημεία Δ, E της ευθείας $B\Gamma$ της βάσης που δεν ανήκουν στην πλευρά $B\Gamma$, τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν $\Delta B' \perp AB$ και $E\Gamma' \perp A\Gamma$, να αποδειχτεί ότι :

- i. τα τρίγωνα $\Delta B B'$ και $\Gamma E \Gamma'$ είναι ίσα
- ii. τα τρίγωνα $AB\Gamma'$ και $A\Gamma B'$ είναι ίσα

33. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε το ύψος $A\Delta$.

i) Αν E, Z είναι τα μέσα των $AB, A\Gamma$ να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔEZ και $A\Delta E$ είναι ίσα

ii) Αν M είναι το μέσο της EZ να αποδείξετε ότι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$

iii) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι διπλάσια από την περίμετρο του τριγώνου ΔEZ

34. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Πάνω στη $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $A\Delta = AB$.

Αν

AZ η αντίστοιχη διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$, να δείξετε ότι :

α) η AZ είναι κάθετη στη $B\Delta$

β) $\Gamma B\Delta = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

γ) $K\Lambda = \frac{A\Gamma - AB}{2}$, όπου K το σημείο τομής των AZ και $B\Delta$ και Λ το μέσο της $B\Gamma$

35. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και έστω K, Λ, M τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma A$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο $K\Lambda M A$ είναι ορθογώνιο.

β) η περίμετρος του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίση με τη περίμετρο του ορθογωνίου

$K\Lambda M A$ αυξημένη κατά το άθροισμα των διαγωνίων του $A\Lambda$ και KM .

36. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρνουμε το ύψος $A\Delta$ και τη ΔE κάθετη στην AB και τη ΔZ κάθετη στην $A\Gamma$. Αν η διάμεσος AM τέμνει τη ΔZ στο H να αποδείξετε ότι :

α. $B\hat{\Delta}E = \hat{\Gamma}$

β. τα τρίγωνα AHZ και $B\Delta E$ είναι ίσα .

γ. το τετράπλευρο $BEZH$ είναι παραλληλόγραμμο .

δ. $A\Delta = BH$

37. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε ευθεία ε παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ που διέρχεται από την κορυφή A . Φέρνουμε τις διχοτόμους των γωνιών B και Γ οι οποίες τέμνουν την ευθεία ε στα Δ και E αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές

ii) το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές

iii) $\Delta E = AB + A\Gamma$

38. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), με $AB = 3$, $B\Gamma = 4$ και η γωνία

$\hat{A} = 120^\circ$. Φέρνω $A\Gamma$ κάθετη στη $\Delta\Gamma$.

α) Να βρεθεί το μήκος της ΔE

β) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου KM του τραpezίου .

γ) Αν οι μη παράλληλες πλευρές $\Delta A, \Gamma B$ τέμνονται στο Z , να

αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ZK\overset{\Delta}{M}$ είναι ισόπλευρο.

39. Έστω τρίγωνο $K\Lambda M$, η διάμεσος του ΛZ και A, B, Γ τα μέσα των $K\Lambda, KZ, ZM$ αντίστοιχα .

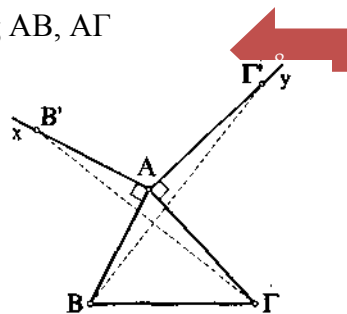
Αν P είναι το σημείο τομής των ΛZ και ΓA , να αποδειχτεί ότι :

i) $AB \parallel \Lambda Z$

ii) $AP = P\Gamma$

iii) $PZ = \frac{1}{4} \Lambda Z$

40. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και δύο ημιευθείες Ax, Ay κάθετες στις πλευρές $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα και τέτοιες, ώστε καθεμία από τις γωνίες χAB και $y A\Gamma$ να είναι εφεξής με την A . Στις Ax, Ay παίρνουμε τμήματα $AB' = AB$ και $A\Gamma' = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = \Gamma B'$.



41. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} > 90^\circ$ και Δ, E σημεία των πλευρών $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $A\Delta = AE$. Αν οι κάθετες στις πλευρές $AB, A\Gamma$ στα σημεία Δ, E τέμνουν τις ημιευθείες $\Gamma A, BA$ στα σημεία Δ', E' αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι:
 α) $\Delta\Delta' = EE'$,
 β) αν οι ευθείες $\Delta\Delta'$ και EE' τέμνονται στο σημείο P , τότε το τρίγωνο $P\Delta'E'$ είναι ισοσκελές
 και η PA διχοτομεί τη γωνία $\hat{A}$.

42. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) έτσι ώστε $3\Delta\Gamma = 4AB$. Στη βάση AB παίρνουμε σημείο E έτσι ώστε $AE = \frac{1}{3} AB$. Έστω Z το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και H το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΔE .
 Να αποδείξετε ότι :
 α) $HZ \parallel AB$
 β) Αν K το σημείο τομής του ευθυγράμμου τμήματος HZ με το $A\Delta$, να αποδείξετε ότι $HK = \frac{1}{6} AB$.

43. Σε ένα τρίγωνο ΔEZ (με $\angle EZ < 90^\circ$) φέρνουμε τη διάμεσο EK και το ύψος ZH του τριγώνου ΔEZ , που τέμνονται στο σημείο Θ . Αν $KI \perp E\Delta$ και $EK = ZH$, να αποδείξετε ότι

i. $KI = \frac{ZH}{2}$

ii. $\angle IEK = 30^\circ$

iii. $E\Theta = 2\Theta H$.

44. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΔEZ φέρνουμε το ύψος ΔH και το προεκτείνουμε κατά τμήμα $HK = AH$.

α) Αν M είναι το μέσο του KE , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔHME είναι τραπέζιο.

β) Αν Λ είναι το μέσο του EM και N το μέσο του AH , να αποδείξετε ότι

$$K\Lambda = \frac{3\Delta E}{4}.$$



45. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Η μεγάλη βάση $\Delta\Gamma$ είναι διπλάσια της μικρής βάσης AB και είναι $\hat{\Gamma} = 45^\circ$. Από την κορυφή B φέρνουμε τη BE κάθετη στην $\Delta\Gamma$. Έστω N το σημείο τομής των AE και $B\Delta$. Να αποδειχτεί ότι :
- α) η $A\Gamma$ διέρχεται από το μέσο M της BE . (5 μονάδες)
 - β) $AE \perp B\Delta$ (4 μονάδες)
 - γ) $AE = B\Delta$ (4 μονάδες)
 - δ) $MN = \frac{1}{4} \Delta\Gamma$. (12 μονάδες)
46. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), με $AB = 6$, $A\Delta = 4$ και η γωνία $\hat{\Delta} = 60^\circ$.
- Φέρνω AE κάθετη στη $\Delta\Gamma$.
- α) Να βρεθεί το μήκος της ΔE (8 μονάδες)
 - β) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου KM του τραπεζίου. (9 μονάδες)
 - γ) Αν οι μη παράλληλες πλευρές $\Delta A, \Gamma B$ τέμνονται στο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ZKM είναι ισόπλευρο. (8 μονάδες)
47. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Έστω E, Z τα μέσα των $B\Gamma, \Delta\Gamma$ αντίστοιχα..
- Αν O το κέντρο του παραλληλογράμμου να δείξετε ότι :
- α) το τετράπλευρο $OE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο (9 μονάδες)
 - β) αν H το σημείο τομής των $EZ, A\Gamma$ τότε : $HE = \frac{B\Delta}{4}$ και $H\Gamma = \frac{A\Gamma}{4}$.
48. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Έστω $A\Delta$ η διχοτόμος και AM διάμεσος του $AB\Gamma$. Από το B φέρνουμε κάθετη στην $A\Delta$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο Z .
- Να αποδειχθεί ότι:
- i) Το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές
 - ii) $\hat{ZB\Gamma} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$
 - iii) Αν $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$ τότε να αποδείξετε ότι : $ZM \perp B\Gamma$
49. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε την εσωτερική διχοτόμο $A\Delta$ και την εξωτερική διχοτόμο $A\chi$ της γωνίας A . Φέρνουμε και τις $BE \perp A\Delta$ και $BZ \perp A\chi$. Να αποδείξετε ότι:
- α) το τετράπλευρο $AEBZ$ είναι ορθογώνιο,
 - β) η ZE είναι παράλληλη στην $A\Gamma$,
 - γ) η ZE , αν προεκταθεί, διέρχεται από το μέσο M της $B\Gamma$,
 - δ) $ZM = \frac{AB + A\Gamma}{2}$
50. Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $A = \Delta = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $B = 3\Gamma$.
- Φέρνουμε τη $BE \perp \Delta\Gamma$, που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K , και την AE , που τέμνει τη $B\Delta$ στο σημείο Λ . Να αποδείξετε ότι:
- α) $\Gamma = 45^\circ$
 - β) $B\Delta = AE$
 - γ) $\Lambda K = \frac{1}{4} \Delta\Gamma$