

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

1. Εστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n .
- α) Αν $v_i = 3i - 1$, $i = 1, 2, 3, 4$, να βρείτε το μέγεθος n του δείγματος.
- β) Αν $f_i = \frac{1}{3i-2}$, $i = 2, 3, 4$ να βρείτε τη σχετική συχνότητα f_1 .
2. Εστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n με αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\% = \frac{50i}{\lambda + 1}$, $i = 1, 2, 3, 4$.
- α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.
- β) Να βρείτε τις σχετικές συχνότητες f_i .
- γ) Αν $n = 200$, να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής σχετικών συχνοτήτων, απόλυτων και αθροιστικών.

3. Δίνεται η κατανομή αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$ του διπλανού πίνακα.

x_i	$F_i\%$
1	25
2	45
3	75
4	90
5	100

- α) Αν το δείγμα έχει μέγεθος 40 να βρείτε τα $v_i, N_i, f_i, f_i\%, F_i$.
- β) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων.
4. Οι βαθμοί που πήρε μια ομάδα φοιτητών στο μάθημα της Στατιστικής είναι από 2 έως και 10 και κατανέμονται σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους. Το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των βαθμών τους έχει εμβαδόν 200. Το ύψος του ορθογωνίου με κεντρική τιμή 5 είναι 40 και η συχνότητα της πρώτης κλάσης είναι ίση με τη συχνότητα της τρίτης κλάσης και κατά 20 μεγαλύτερη από τη συχνότητα της τέταρτης κλάσης.
- α) Να κατασκευάσετε πίνακα σχετικών συχνοτήτων, απόλυτων και αθροιστικών.
- β) Να βρείτε το ποσοστό των φοιτητών που άριστευσαν (Βαθμός τουλάχιστον 8,5)
5. Να βρείτε τρεις παρατηρήσεις που έχουν εύρος 5, διάμεσο 10 και μέση τιμή 9.
6. Το μέσο βάρος ενός δείγματος 100 ανθρώπων είναι 80 κιλά. Αν κανένας από τους ανθρώπους αυτούς δεν ζυγίζει λιγότερο από 60 κιλά, να αποδείξετε ότι η διάμεσος των βαρών τους είναι το πολύ 100 κιλά.

7. Δίνεται ο διπλάνος πίνακας σχετικών συχνοτήτων n τιμών μιας μεταβλητής X .

x_i	1	2	3	4	5
v_i	8	9	α	β	11

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή τους.
- β) Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 4 είναι 2,2.

8. Δίνεται ο διπλάνος πίνακας κατανομής συχνοτήτων, απόλυτων και σχετικών. Έστω ότι η διάμεσος των παρατηρήσεων είναι $\delta = 3,5$, η μέση τιμή τους είναι $\bar{x} = 3,44$ και η μέση τιμή των τριών μεγαλύτερων παρατηρήσεων είναι 4,8.

- α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 50.
- β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.
- γ) Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων που δεν ξεπερνούν το 5.

x_i	v_i	$f_i\%$
1		
2	7	14
3		
4		
5		16
6		
Σύνολο		

9. Εστω $x_1, x_2, \dots, x_v$ οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X με μέση τιμή $\bar{x}$. Αν k από αυτές τις παρατηρήσεις έχουν μέση τιμή $\bar{x}_1$ και οι υπόλοιπες έχουν μέση τιμή $\bar{x}_2$, να αποδείξετε ότι:

$$\bar{x} = \frac{k}{v}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + \bar{x}_2.$$

10. Η μέση τιμή 5 παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερη από τη διάμεσό τους δ κατά 1. Αν οι τέσσερις παρατηρήσεις είναι 3, 5, 12, 17, να βρείτε την πέμπτη παρατήρηση.
11. Εστω ότι οι τιμές μιας μεταβλητής X είναι: $\lambda, 11, 12, 33 - 2\bar{x}, \bar{x}, 15, 13$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή τους, $\delta = 11$ η διάμεσός τους και $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το λ και το $\bar{x}$.
12. Η μέση τιμή πέντε ακέραιων αριθμών είναι τριπλάσια της διαμέσου και $9 < \bar{x} < 85$. Αν οι τέσσερις αριθμοί είναι οι 1, 3, 9, 85, να βρείτε τον πέμπτο αριθμό.
13. Η μέση τιμή 500 παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X είναι $\bar{x}$. Το 12% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από τις πραγματικές κατά 5, το 16% είναι μικρότερες κατά 1 και το 18% είναι μικρότερες κατά 8. Να αποδείξετε ότι η πραγματική μέση τιμή είναι μεγαλύτερη από τη $\bar{x}$ κατά 1.

14. Εστω ότι οι καθημερινές δαπάνες σε ευρώ των μαθητών ενός σχολείου έχουν ομαδοποιηθεί όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα. Εστω ότι $f_1^2 + 9f_3^2 + f_2^2 = 6f_1f_3 + 0,8f_2 - 0,16$ και η συχνότητα της πρώτης κλάσης είναι ίση με τα $3/2$ της συχνότητας της τέταρτης κλάσης.

$[... - ...)$	f_i
0–2	f_1
2–4	f_2
4–6	f_3
6–8	f_4

- α) Να βρείτε τις σχετικές συχνότητες των κλάσεων.
 β) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των δαπανών.
 γ) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
 δ) Αν είναι 400 οι μαθητές του σχολείου, να βρείτε πόσοι ξοδεύουν λιγότερα από 0,5 ευρώ.
15. Εστω $t_1, t_2, \dots, t_{50}$ οι τιμές μιας μεταβλητής X . Αν οι 20 πρώτες τιμές έχουν μέση τιμή 6 και τυπική απόκλιση 1 και οι υπόλοιπες έχουν μέση τιμή 10 και τυπική απόκλιση 2, να βρείτε:
 α) Τη μέση τιμή όλων των τιμών.
 β) Τη τυπική απόκλιση του συνόλου.

16. Αν s^2 η διακύμανση των n τιμών ποσοτικής μεταβλητής X και $\bar{x}^2$ η μέση τιμή των τετραγώνων τους, να αποδείξετε ότι $s^2 \leq \bar{x}^2$.

17. Σε μια επιχείρηση εργάζονται 100 υπάλληλοι από τους οποίους οι 60 είναι άντρες με μέση ηλικία $\bar{x}_A = 40$ έτη και συντελεστή μεταβολής $CV_A = 15\%$ και 40 γυναίκες με μέση ηλικία $\bar{x}_F = 30$ έτη και συντελεστή μεταβολής $CV_F = 10\%$. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των ηλικιών όλων των εργαζομένων.

18. Εστω ότι οι αριθμοί 2, α , 1, β , 10 έχουν μέση τιμή 4 και συντελεστή μεταβολής

$$CV = \frac{\sqrt{10}}{4}. \text{ Να βρείτε τα } \alpha, \beta, \text{ αν γνωρίζετε ότι } \alpha < \beta.$$

19. Δίνονται οι αριθμοί 15, 18, 21, 22, 24, $x_1 = 20$, $x_2 = 20, \dots, x_k = 20$

α) Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των 5 πρώτων αριθμών είναι ίση με τη συνολική μέση τιμή.

- β)** Αν s^2 η διασπορά των 5 πρώτων αριθμών και $s_{ολ}^2$ η συνολική διασπορά, να αποδείξετε
 ότι: $s_{ολ}^2 = \frac{5s^2}{5+k}$.
- γ)** Να βρείτε το k , για το οποίο το συνολικό δείγμα των αριθμών είναι οριακά ομοιογενές.
- 20.** Δίνονται οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_9$ μιας ποσοτικής μεταβλητής X με μέση τιμή 10 και τυπική απόκλιση 1. Προσθέτουμε στο δείγμα μια ακόμη παρατήρηση την $x_{10} = 15$.
α) Να βρείτε τη νέα μέση τιμή **β)** Να βρείτε τη νέα τυπική απόκλιση
γ) Είναι το νέο δείγμα ομοιογενές;
- 21.** Σε μια έρευνα για το μηνιαίο χρόνο χρήσης του κινητού τηλεφώνου σε λεπτά, που έγινε σε 26 μαθητές μιας τάξης βρέθηκε ότι $\sum_{i=1}^{26} x_i = 910$ και $\sum_{i=1}^{26} x_i^2 = 32.084$.
α) Να υπολογίσετε το μέσο χρόνο χρήσης του κινητού από αυτούς τους μαθητές, καθώς και τη τυπική απόκλιση τιμών.
β) Αν την ημέρα της έρευνας απουσίαζαν 2 μαθητές και όταν ρωτήθηκαν απάντησαν ότι κάθε μήνα χρησιμοποιούν το κινητό τους 37 και 33 λεπτά αντίστοιχα, να βρείτε πόσο θα επηρεάσουν αυτοί οι χρόνοι το μέσο όρο και τη τυπική απόκλιση των χρόνων χρήσης του κινητού σε αυτή την ομάδα μαθητών.
- 22.** Εστω ότι το δείγμα των τιμών $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ μιας ποσοτικής μεταβλητής X , είναι ομοιογενές.
α) Να αποδείξετε ότι $1000 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \leq 101 \left(\sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2$.
β) Αν $\bar{x} = 20$, να βρείτε τη μέγιστη τιμή του αθροίσματος $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2$.
- 23.** Εστω x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 διαδοχικοί ακέραιοι.
α) Να αποδείξετε ότι $s = \sqrt{2}$.
β) Να βρείτε τις μικρότερες τιμές των 5 ακεραίων για τις οποίες το δείγμα είναι ομοιογενές.
- 24.** Εστω s^2 η διακύμανση των παρατηρήσεων ενός δείγματος με μέση τιμή $\bar{x}$. Αν οι μισές παρατηρήσεις έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και διακύμανση s_A^2 , ενώ οι άλλες μισές έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και διακύμανση s_B^2 , να αποδείξετε ότι $s_A^2 + s_B^2 = 2s^2$.
- 25.** Εστω δύο δείγματα Α και Β με θετικές τιμές, για τα οποία ισχύει ότι: $\frac{s_A}{s_B} < 0,5$ και $\frac{\bar{x}_A}{\bar{x}_B} > 3$.
 Ποιο από τα δύο δείγματα παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια;
- 26.** Εστω ότι ένα δείγμα τιμών αποτελείται από n_1 τιμές ίσες με α και n_2 τιμές ίσες με β , όπου $\alpha < \beta$ και $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ και έχει τυπική απόκλιση s . Να αποδείξετε ότι: $s \leq \frac{\beta - \alpha}{2}$.
- 27.** Δίνονται εννέα αριθμοί. Ο ένας είναι ο k και οι άλλοι οκτώ είναι διαδοχικοί περιτοί ακέραιοι. Αν και οι εννέα αριθμοί έχουν μέση τιμή 64 και $k \in (50, 80)$, να βρείτε τη διάμεσο και την διακύμανση των εννέα αριθμών.

28. Εστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ θετικές τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s . Αν $y_i = \frac{3x_i - \bar{x}}{s}$, $i = 1, 2, \dots, n$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής y , να αποδείξετε ότι $\bar{y} = -\frac{2}{CV_x}$.
29. Να δείξετε ότι αν από όλες τις τιμές ενός δείγματος αφαιρέσουμε τη μέση τιμή τους και διαιρέσουμε τα αποτελέσματα με την τυπική τους απόκλιση, τότε οι νέες τιμές έχουν μέση τιμή 0 και διασπορά 1.
30. Αν σ' ένα δείγμα μεγέθους n για τις μεταβλητές X, Y, Z ισχύουν οι σχέσεις: $Z_i = 3x_i - 12$, $y_i = 2 - x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ και οι μεταβλητές Y, Z έχουν τον ίδιο συντελεστή μεταβολής, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$.
31. Εστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ θετικές παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , για τις οποίες ισχύει: $\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i = 900$ και $s^2 = 20$. Έστω $y_i = x_i^2$, $i = 1, 2, \dots, k$ οι τιμές μιας μεταβλητής Y με μέση τιμή μεγαλύτερη από τη μέση τιμή των x_i κατά 40. Να βρείτε το μέγεθος n του δείγματος.
32. Οι μαθητές ενός σχολείου ξοδεύουν κατά μέσο όρο 5 ευρώ την ημέρα.
 α) Αν ο συντελεστής μεταβολής είναι 20%, να υπολογίσετε τη τυπική απόκλιση.
 β) Αν $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 3.900$, να υπολογίσετε τον αριθμό των μαθητών του σχολείου.
 γ) Σε ένα άλλο σχολείο που έχει το ίδιο πλήθος μαθητών, οι μαθητές ξοδεύουν τα διπλάσια χρήματα κάθε ημέρα. Να εξετάσετε αν ο συντελεστής μεταβολής στο δεύτερο σχολείο είναι διαφορετικός.
33. Ένας πλανόδιος πωλητής πούλησε σε μια ημέρα 100 καρπούζια. Το μέσο βάρος των καρπουζιών ήταν 7 κιλά με τυπική απόκλιση 1 κιλό. Ο πωλητής γνώριζε ότι η ζυγαριά του έδειχνε 2 κιλά περισσότερα σε κάθε μέτρηση.
 α) Να βρείτε τη πραγματική μέση τιμή και τυπική απόκλιση των καρπουζιών.
 β) Αν x_i , $i = 1, 2, 3, \dots, 100$ τα πραγματικά βάρη των καρπουζιών, να δείξετε ότι $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 = 2600$.
34. Ένα δείγμα n παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X με θετικές τιμές έχει μέση τιμή $\bar{x}$ και διακύμανση s^2 . Αν ισχύει ότι $100s^2 = 16\bar{x}^2$ τότε :
 α) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος. Είναι το δείγμα ομοιογενές;
 β) Αυξάνουμε κάθε μια από τις παρατηρήσεις x_i κατά $c > 0$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του c για την οποία το δείγμα τιμών είναι ομοιογενές.
 γ) Αν η μέση τιμή των τετραγώνων των παρατηρήσεων της μεταβλητής X είναι 116, να υπολογίσετε το $\bar{x}$.
35. Οι σημερινές ηλικίες μιας ομάδας ανθρώπων έχουν συντελεστή μεταβολής $CV_1 = 8\%$, ενώ πρίν από 15 χρόνια ο συντελεστής μεταβολής ήταν $CV_2 = 20\%$.
 α) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη τυπική απόκλιση της σημερινής τους ηλικίας.

- β) Πριν πόσα χρόνια από σήμερα οι ηλικίες των ανθρώπων αυτής της ομάδας είχαν για πρώτη φορά ομοιογένεια;
 γ) Αν το άθροισμα των τετραγώνων των σημερινών ηλικιών τους είναι 25.160, να βρείτε πόσοι άνθρωποι απαρτίζουν αυτή την ομάδα.

36. Εστω μεταβλητή X με θετικές παρατηρήσεις $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και

τυπική απόκλιση $s = \frac{2}{3}$ και για τις οποίες ισχύει ότι: $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = n - \sum_{i=1}^n x_i$.

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = \frac{5}{9}$

β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ) Να αποδείξετε ότι $\bar{x} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = (s^2 + \bar{x}^2) \cdot \sum_{i=1}^n x_i$

δ) Να αποδείξετε $\frac{5-6\sqrt{n}}{9} \leq x_i \leq \frac{5+6\sqrt{n}}{9}$.

ε) Εστω $y_i = x_i^2, i = 1, 2, \dots, n$. Να αποδείξετε ότι $\bar{y} = \frac{61}{81}$

37. Οι βαθμοί των μαθητών της Γ Λυκείου ενός σχολείου έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις και δίνονται στον διπλανό πίνακα. Αν ο μέσος όρος των βαθμών είναι $\bar{x} = 15,3$, τότε:

α) Να βρείτε τις κλάσεις.

β) Να αποδείξετε ότι $F_2\% = 40$.

γ) Να βρείτε τη διάμεσο των βαθμών.

δ) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών με βαθμό από 13 έως 17.

ε) Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των βαθμών ($\sqrt{6,51} = 2,55$).

Βαθμοί [...-...)	$F_i\%$
10-...	10
...-...	
...-...	60
...-18	80
...-...	

στ) Να σχεδιάσετε το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το πολύγωνο και τον οριζόντιο άξονα.

Εστω ότι οι μαθητές των δύο πρώτων κλάσεων αυξήσουν τους βαθμούς τους κατά 2 μονάδες.

ζ) να βρείτε τη μέση τιμή των νέων βαθμών.

η) Να εξετάσετε αν οι συγκεκριμένοι βαθμοί ακολουθούν την κανονική κατανομή.

($\sqrt{3,4} = 1,84$)

38. Δίνεται ένα δείγμα n παρατηρήσεων $t_1, t_2, \dots, t_n$ μιας ποσοτικής μεταβλητής X με

$t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ το οποίο έχει μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s . Να αποδείξετε ότι:

α) $t_1 \leq \bar{x} \leq t_n$.

β) $\bar{x} = t_n \Leftrightarrow t_1 = t_2 = \dots = t_n$

γ) $\bar{x} - s\sqrt{n} \leq t_i \leq \bar{x} + s\sqrt{n}$

39. Εστω $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$ θετικές τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X με μέση τιμή $\bar{x}$, τυπική

απόκλιση s και συντελεστή μεταβολής $CV = 20\%$. Αν $\sum_{i=1}^{1000} x_i^2 = 104.000$, τότε:

α) Να βρείτε τα $\bar{x}$ και s .

β) Να βρείτε πόσο πρέπει να αυξηθούν οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_n$, ώστε το δείγμα να είναι οριακά ομοιογενές.

γ) Να αποδείξετε ότι $(x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2 + \dots + (x_{1000} - 10)^2 = 4000$

δ) Να αποδείξετε ότι $10(1 - 2\sqrt{0}) \leq x_i \leq 10(1 + 2\sqrt{0})$, $1 \leq i \leq 1000$.

ε) Αν το αρχικό δείγμα των 1000 παρατηρήσεων χωριστεί σε δύο επιμέρους δείγματα των 500 παρατηρήσεων που έχουν μέση τιμή ίση με την αρχική και τυπικές αποκλίσεις s_1, s_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $s_1^2 + s_2^2 = 8$.

στ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{i=1}^{1000} (x_i^2 - 5x_i - 4)$

40. Στο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων του διπλανού σχήματος, τα δεδομένα είναι ομαδοποιημένα σε κλάσεις ίσου πλάτους c .

Αν θεωρηθεί ότι το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων είναι τρίγωνο, τότε :

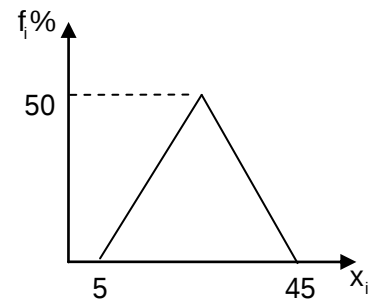
α) Να βρείτε το πλάτος c και το πλήθος k των κλάσεων.

β) Αν $f_1\% = f_3\% = 25$, να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

γ) Να βρείτε το εύρος R , τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s του δείγματος.

δ) Αν ισχύει $\sum_{i=11}^k x_i^2 v_i = 27.000$, να βρείτε το μέγεθος n του δείγματος.

ε) Να αποδείξετε ότι το κλάσμα $A = \frac{x_1^2 v_1 + x_2^2 v_2 + \dots + x_k^2 v_k}{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k}$ είναι ανεξάρτητο του πλήθους n .



ΛΥΣΕΙΣ

1. α) $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v \Leftrightarrow 3 \cdot 1 - 1 + 3 \cdot 2 - 1 + 3 \cdot 3 - 1 + 3 \cdot 4 - 1 = v \Leftrightarrow v = 26$

β) $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_1 + \frac{1}{3 \cdot 2 - 2} + \frac{1}{3 \cdot 3 - 2} + \frac{1}{3 \cdot 4 - 2} = 1 \Leftrightarrow f_1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} = 1 \Leftrightarrow$
 $f_1 + \frac{69}{140} = 1 \Leftrightarrow f_1 = 1 - \frac{69}{140} = \frac{71}{140}$

2. α) Είναι $F_4\% = 100 \Leftrightarrow \frac{50 \cdot 4}{\lambda + 1} = 100 \Leftrightarrow \frac{200^2}{\lambda + 1} = 100^1 \Leftrightarrow 2 = \lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$

β) $f_1 = F_1 = \frac{50 \cdot 1}{100} = \frac{1}{4} = 0,25,$

$f_2 = F_2 - F_1 = \frac{50 \cdot 2}{100} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0,25,$

$f_3 = F_3 - F_2 = \frac{50 \cdot 3}{100} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$ και $f_4 = 1 - f_1 - f_2 - f_3 = 0,25$

γ)

X	v	f _i	f _i %	N _i	F _i	F _i %
x ₁	50	0,25	25	50	0,25	25
x ₂	50	0,25	25	100	0,50	50
x ₃	50	0,25	25	150	0,75	75
x ₄	50	0,25	25	200	1	100
Σύνολο	200	1	100			

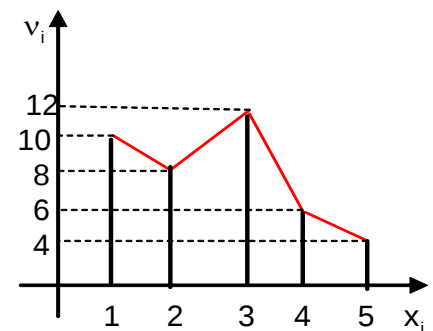
$f_1 = \frac{v_1}{v} = 0,25 \Leftrightarrow v_1 = 50$ και όμοια $v_2 = v_3 = v_4 = 50.$

$N_1 = v_1 = 50, N_2 = v_1 + v_2 = 100, N_3 = N_2 + v_3 = 150$ και $N_4 = v = 200$

3. α)

x _i	v _i	N _i	f _i	f _i %	F _i	F _i %
1	10	10	0,25	25	0,25	25
2	8	18	0,2	20	0,45	45
3	12	30	0,3	30	0,75	75
4	6	36	0,15	15	0,9	90
5	4	40	0,1	10	1	100
Σύνολο	40		1	100		

β)



4. α) Το εύρος των βαθμών είναι $R = 10 - 2 = 8$, το πλήθος των κλάσεων είναι $k = 4$, οπότε το πλάτος της κάθε κλάσης θα είναι: $c = \frac{R}{k} = 2$, άρα οι κλάσεις είναι οι

$[2,4), [4,6), [6,8), [8,10]$

Επειδή το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των βαθμών τους έχει εμβαδόν 200, το πλήθος των βαθμών είναι $n = 200$

Επειδή το ύψος του ορθογωνίου με κεντρική τιμή 5 είναι 40, είναι $n_2 = 40$.

Επειδή η συχνότητα της πρώτης κλάσης είναι ίση με τη συχνότητα της τρίτης κλάσης και κατά 20 μεγαλύτερη από τη συχνότητα της τέταρτης κλάσης, ισχύει ότι: $n_1 = n_3 = n_4 + 20$

Όμως $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 200 \Leftrightarrow n_4 + 20 + 40 + n_4 + 20 + n_4 = 200 \Leftrightarrow n_4 = 40$, οπότε

$$n_1 = n_3 = 60. f_1 = \frac{60}{200} = 0,30, f_2 = \frac{40}{200} = 0,20, f_3 = \frac{60}{200} = 0,30 \text{ και } f_4 = \frac{40}{200} = 0,20$$

Κλάσεις	x_i	n_i	N_i	f_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
$[2,4)$	2	60	60	0,30	30	0,30	10
$[4,6)$	6	40	100	0,20	20	0,50	35
$[6,8)$	10	60	160	0,30	30	0,80	70
$[8,10]$	14	40	200	0,20	20	1	100
Σύνολο		200		1	100		

β) Από 8,5 έως και 10 έχει το $\frac{10-8,5}{10-8} 100\% = \frac{3}{4} 100\% = 75\%$ της κλάσης $[8,10]$.

Άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι το $\frac{3}{4} f_4\% = 15\%$

5. Εστω x_1, x_2, x_3 οι τρεις παρατηρήσεις, με $x_1 < x_2 < x_3$. Επειδή $\delta = 10$ είναι $x_2 = 10$.

$$R = 5 \Leftrightarrow x_3 - x_1 = 5 \Leftrightarrow x_3 = x_1 + 5 \quad (1)$$

$$\bar{x} = 9 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 9 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x_1 + 10 + x_1 + 5 = 27 \Leftrightarrow 2x_1 = 12 \Leftrightarrow x_1 = 6 \text{ και } x_3 = 6 + 5 = 11$$

6. Εστω $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ τα βάρη των 100 ανθρώπων διατεταγμένα σε αύξουσα σειρά.

$$\text{Είναι } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{100} = 80 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{100} x_i = 8000$$

$$\text{Για τη διάμεσο } \delta \text{ του δείγματος, ισχύει ότι: } \delta = \frac{x_{50} + x_{51}}{2}.$$

Αν η διάμεσος ήταν μεγαλύτερη ή ίση των 100 κιλών, τότε οι παρατηρήσεις $x_{51}, x_{52}, \dots, x_{100}$ θα ήταν μεγαλύτερες από 100 κιλά, οπότε $x_{51} + x_{52} + \dots + x_{100} > 50 \cdot 100 = 5000$ (1)

Τότε όμως οι παρατηρήσεις από τη x_{50} και κάτω δεν θα ξεπερνούσαν το 100 και θα ήταν μεγαλύτερες ίσες του 60, δηλαδή: $60 \leq x_1 \leq 100, 60 \leq x_2 \leq 100, \dots, 60 \leq x_{50} \leq 100$, άρα

$$50 \cdot 60 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_{50} \leq 50 \cdot 100 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{50} \geq 3000 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2), προκύπτει: $\sum_{i=1}^{100} x_i > 8000$ που είναι άτοπο.

7. α) Επειδή το πλήθος των τιμών είναι 40, ισχύει ότι: $8+9+\alpha+\beta+11=40 \Leftrightarrow \alpha=12-\beta$ (1)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{40} = \frac{1 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 3\alpha + 4\beta + 5 \cdot 11}{40} \Leftrightarrow \frac{3\alpha + 4\beta + 81}{40} = 3,15 \Leftrightarrow 3\alpha + 4\beta + 81 = 126 \Rightarrow^{(1)}$$

$$3(12-\beta) + 4\beta = 45 \Leftrightarrow 36 - 3\beta + 4\beta = 45 \Leftrightarrow \beta = 9 \text{ και από την (1) είναι } \alpha = 3$$

- β) Επειδή η διάμεσος είναι το 3,5, οι μισές παρατηρήσεις θα είναι μικρότερες από το 3,5 και οι άλλες μισές μεγαλύτερες. Άρα
 $8+9+\alpha=20 \Leftrightarrow \alpha=3$ και $\beta+11=20 \Leftrightarrow \beta=9$.

8. α) $f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow \frac{14}{100} = \frac{7}{v} \Leftrightarrow v=50$

β) $f_5 = \frac{v_5}{v} \Leftrightarrow 0,16 = \frac{v_5}{50} \Leftrightarrow v_5 = 8$.

Επειδή η διάμεσος είναι $\delta = 3,5$, το 50% των παρατηρήσεων θα είναι μικρότερες του 3,5 και το 50% μεγαλύτερες του 3,5. Άρα

$$v_1 + v_2 + v_3 = 25 \Leftrightarrow v_1 + 7 + v_3 = 25 \Leftrightarrow v_1 + v_3 = 18 \Leftrightarrow v_1 = 18 - v_3 \text{ (1) και}$$

$$v_4 + v_5 + v_6 = 25 \Leftrightarrow v_4 + 8 + v_6 = 25 \Leftrightarrow v_4 + v_6 = 17 \Leftrightarrow v_4 = 17 - v_6 \text{ (2)}$$

$$\text{Είναι } \bar{x} = 3,44 \Leftrightarrow \frac{1 \cdot v_1 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot v_3 + 4 \cdot v_4 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot v_6}{50} = 3,44 \Leftrightarrow$$

$$v_1 + 3v_3 + 4v_4 + 6v_6 + 54 = 172 \Leftrightarrow v_1 + 3v_3 + 4v_4 + 6v_6 = 118 \Rightarrow^{(1),(2)}$$

$$18 - v_3 + 3v_3 + 4(17 - v_6) + 6v_6 = 118 \Leftrightarrow 2v_3 + 2v_6 = 32 \Leftrightarrow v_3 + v_6 = 16 \Leftrightarrow v_3 = 16 - v_6 \text{ (3)}$$

Επειδή η μέση τιμή των τριών μεγαλύτερων παρατηρήσεων είναι 4,4, ισχύει ότι:

$$\frac{4 \cdot v_4 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot v_6}{v_4 + 8 + v_6} = 4,8 \Leftrightarrow 4v_4 + 40 + 6v_6 = 4,8v_4 + 38,4 + 4,8 \cdot v_6 \Leftrightarrow$$

$$0,8v_4 - 1,2v_6 = 16 \Leftrightarrow 8v_4 - 12v_6 = 16 \Leftrightarrow 8(17 - v_6) - 12v_6 = 16 \Leftrightarrow v_6 = 6, v_3 = 10,$$

$$v_1 = 18 - 10 = 8 \text{ και } v_4 = 17 - 6 = 11$$

x_i	v_i	$f_i\%$
1	8	16
2	7	14
3	10	20
4	11	22
5	8	16
6	6	12
Σύνολο	50	100

9. $\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{v_1} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k x_i = k\bar{x}_1, \bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=k+1}^v x_i}{v-k} \Leftrightarrow \sum_{i=k+1}^v x_i = (v-k)\bar{x}_2$

Για τη συνολική μέση τιμή του δείγματος, έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i}{v} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=k+1}^v x_i}{v} = \frac{k\bar{x}_1 + (v-k)\bar{x}_2}{v} = \frac{k\bar{x}_1 + v\bar{x}_2 - k\bar{x}_2}{v} = \frac{k(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + v\bar{x}_2}{v} \Leftrightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{\kappa}{v}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + \bar{x}_2$$

10. Επειδή οι παρατηρήσεις είναι πέντε, η διάμεσος θα είναι η τρίτη παρατήρηση. Δηλαδή η πέμπτη παρατήρηση είναι η δ . Τότε $\bar{x} = \frac{3+5+\delta+12+17}{5} = \frac{37+\delta}{5}$.

Όμως $\bar{x} = \delta + 1$, άρα $\frac{37+\delta}{5} = \delta + 1 \Leftrightarrow 37 + \delta = 5\delta + 5 \Leftrightarrow 32 = 4\delta \Leftrightarrow \delta = 8$.

11. Επειδή οι παρατηρήσεις είναι επτά, η διάμεσος είναι η τέταρτη παρατήρηση. Άρα $\delta = x_4 = 11$.

Επειδή τρεις παρατηρήσεις (12, 13, 15) είναι μεγαλύτερες της διαμέσου, οι άλλες τρεις δεν θα υπερβαίνουν τη διάμεσο. Δηλαδή $\bar{x} \leq 11$ (1), $\lambda \leq 11$ και

$$33 - 2\bar{x} \leq 11 \Leftrightarrow 33 - 11 \leq 2x \Leftrightarrow \bar{x} \geq 11 \text{ (2)}.$$

Από τις (1),(2), προκύπτει ότι $\bar{x} = 11$. Είναι

$$\bar{x} = \frac{\lambda + 11 + 12 + 33 - 2\bar{x} + \bar{x} + 15 + 13}{7} = 11 \Leftrightarrow \lambda + 84 - \bar{x} = 77 \Leftrightarrow \lambda + 84 - 11 = 77 \Leftrightarrow \lambda = 4$$

12. Είναι $\bar{x} = 3\delta \Rightarrow 9 < 3\delta < 85 \Leftrightarrow 3 < \delta < \frac{85}{3}$

Επειδή οι παρατηρήσεις είναι 5, η διάμεσος είναι η τρίτη παρατήρηση, εφόσον βέβαια τοποθετηθούν σε αύξουσα σειρά.

Αν $3 < \delta \leq 9$, τότε η τρίτη παρατήρηση είναι το 4 ή 5 ή 6 ή 7 ή 8 ή 9.

Αν $9 < \delta < \frac{85}{3}$, τότε η τρίτη παρατήρηση είναι το 10 ή 11 ή...ή 24.

13. Είναι $\frac{12}{100}500 = 60$, $\frac{16}{100}500 = 80$ και $\frac{18}{100}500 = 90$

- 60 Παρατηρήσεις είναι μεγαλύτερες από τις κανονικές κατά 5, οπότε το άθροισμα των 500 παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερο από το κανονικό κατά $5 \cdot 60 = 300$
- 80 Παρατηρήσεις είναι μεγαλύτερες από τις κανονικές κατά 1, οπότε το άθροισμα των 500 παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερο από το κανονικό κατά 80
- 90 Παρατηρήσεις είναι μικρότερες από τις κανονικές κατά 8, οπότε το άθροισμα των 500 παρατηρήσεων είναι μικρότερο από το κανονικό κατά $8 \cdot 90 = 720$.

$$\text{Η κανονική μέση τιμή είναι } \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{500} x_i - 300 + 80 + 720}{500} = \frac{\sum_{i=1}^{500} x_i + 500}{500} = \frac{\sum_{i=1}^{500} x_i}{500} + 1 = \bar{x} + 1$$

14. α) $f_1^2 + 9f_3^2 + f_2^2 = 6f_1f_3 + 0,8f_2 - 0,16 \Leftrightarrow f_1^2 - 6f_1f_3 + 9f_3^2 + f_2^2 - 0,8f_2 = -0,16 \Leftrightarrow$

$$f_1^2 - 6f_1f_3 + 9f_3^2 + f_2^2 - 0,8f_2 + 0,16 = 0 \Leftrightarrow (f_1 - 3f_3)^2 + (f_2 - 0,4)^2 = 0 \Leftrightarrow f_1 = 3f_3 \text{ και } f_2 = 0,4.$$

$$\text{Είναι } v_1 = \frac{3}{2}v_4 \Leftrightarrow \frac{v_1}{v} = \frac{3}{2} \frac{v_4}{v} \Leftrightarrow f_1 = \frac{3}{2}f_4 \Leftrightarrow f_4 = \frac{2}{3}f_1 = \frac{2}{3}3f_3 = 2f_3$$

$$\text{Όμως } f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow 3f_3 + 0,4 + f_3 + 2f_3 = 1 \Leftrightarrow 6f_3 = 0,6 \Leftrightarrow f_3 = 0,1$$

Οπότε $f_4 = 0,2$ και $f_1 = 0,3$

$$\beta) \bar{x} = \sum_{i=1}^4 x_i f_i = 3,4$$

$$s^2 = \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^v x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^v x_i v_i \right)^2}{v} \right) = \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2 v_i}{v} - \left(\frac{\sum_{i=1}^v x_i v_i}{v} \right)^2 \Leftrightarrow$$

[...-...)	x_i	x_i^2	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
0-2	1	1	0,3	0,3	0,3
2-4	3	9	0,4	1,2	3,6
4-6	5	25	0,1	0,5	2,5
6-8	7	49	0,2	1,4	9,8
Σύνολο			1	3,4	16,2

$$s^2 = \sum_{i=1}^v x_i^2 f_i - \bar{x}^2 = 16,2 - (3,4)^2 = 4,64 \Leftrightarrow s = \sqrt{4,64} \approx 2,154$$

$$\gamma) CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2,154}{3,4} = 63,35\% > 10\%, \text{ οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.}$$

$$\delta) \text{Λιγότερο από } 0,5 \text{ ευρώ ξεοδεύει το } \frac{0,5-0}{2-0} = \frac{1}{4} \text{ της πρώτης κλάσης.}$$

$$\text{Επειδή } f_1 = \frac{v_1}{v} \Leftrightarrow 0,3 = \frac{v_1}{400} \Leftrightarrow v_1 = 120, \text{ είναι } \frac{1}{4} 120 = 30 \text{ μαθητές.}$$

15. α) Εστω $\bar{x}_1$ η μέση τιμή των πρώτων 20 τιμών και $\bar{x}_2$ η μέση τιμή των υπολοίπων. Είναι

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{20} t_i}{20} = 6 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{20} t_i = 120 \text{ και } \bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=21}^{50} t_i}{30} = 10 \Leftrightarrow \sum_{i=21}^{50} t_i = 300.$$

$$\text{Αν } \bar{x} \text{ είναι η συνολική μέση τιμή, τότε: } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{50} t_i}{50} = \frac{\sum_{i=1}^{20} t_i + \sum_{i=21}^{50} t_i}{50} = \frac{120 + 300}{50} = 8,4$$

β) Εστω s_1 η τυπική απόκλιση των είκοσι πρώτων τιμών και s_2 η τυπική απόκλιση των υπολοίπων. Είναι

$$s_1^2 = \frac{1}{20} \left(\sum_{i=1}^{20} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{20} t_i \right)^2}{20} \right) \Leftrightarrow 1 = \frac{\sum_{i=1}^{20} t_i^2}{20} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{20} t_i}{20} \right)^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{\sum_{i=1}^{20} t_i^2}{20} - \bar{x}_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{20} t_i^2}{20} = 37 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{20} t_i^2 = 740$$

$$s_2^2 = \frac{1}{30} \left(\sum_{i=21}^{50} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=21}^{50} t_i \right)^2}{30} \right) \Leftrightarrow 4 = \frac{\sum_{i=21}^{50} t_i^2}{30} - \left(\frac{\sum_{i=21}^{50} t_i}{30} \right)^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{\sum_{i=21}^{50} t_i^2}{30} - \bar{x}_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=21}^{50} t_i^2}{30} = 101 \Leftrightarrow \sum_{i=21}^{50} t_i^2 = 3030$$

$$\text{Είναι } \sum_{i=1}^{50} t_i^2 = \sum_{i=1}^{20} t_i^2 + \sum_{i=21}^{50} t_i^2 = 740 + 3030 = 3770 \text{ και } \sum_{i=1}^{50} t_i = \sum_{i=1}^{20} t_i + \sum_{i=21}^{50} t_i = 120 + 300 = 420$$

$$s^2 = \frac{1}{50} \left(\sum_{i=1}^{50} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{50} t_i \right)^2}{50} \right) = \frac{\sum_{i=1}^{50} t_i^2}{50} - (\bar{x})^2 = \frac{3770}{50} - (8,4)^2 = 75,4 - 70,56 = 4,84 \Leftrightarrow s = 2,2$$

$$16. s^2 = \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^v x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2}{v} \right) = \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} - \frac{\left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2}{v^2} \Leftrightarrow s^2 = \overline{x^2} - \left(\frac{\sum_{i=1}^v x_i}{v} \right)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \leq \overline{x^2}$$

17. Εστω $x_1, x_2, \dots, x_{60}$ οι ηλικίες των 60 αντρών και $x_{61}, x_{62}, \dots, x_{100}$ οι ηλικίες των γυναικών.

$$\bar{x}_A = 40 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{60} x_i}{60} = 40 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{60} x_i = 2.400, \quad \bar{x}_\Gamma = 30 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=61}^{100} x_i}{40} = 30 \Leftrightarrow \sum_{i=61}^{100} x_i = 1.200.$$

$$\text{Η μέση ηλικία όλων είναι: } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{60} x_i + \sum_{i=61}^{100} x_i}{100} = \frac{3600}{100} = 36.$$

$$CV_A = 15\% \Leftrightarrow \frac{s_A}{\bar{x}_A} = \frac{15}{100} \Leftrightarrow s_A = \frac{3}{20} 40 = 6 \Leftrightarrow s_A^2 = 36 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{60} \left(\sum_{i=1}^{60} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{60} x_i \right)^2}{60} \right) = 36 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{60} x_i^2}{60} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{60} x_i \right)^2}{60^2} = 36 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{60} x_i^2}{60} = 36 + \bar{x}_A^2 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{60} x_i^2 = 60 \cdot 1636 = 98.160$$

$$CV_\Gamma = 10\% \Leftrightarrow \frac{s_\Gamma}{\bar{x}_\Gamma} = \frac{10}{100} \Leftrightarrow s_\Gamma = \frac{1}{10} 30 = 3 \Leftrightarrow s_\Gamma^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{40} \left(\sum_{i=61}^{100} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=61}^{100} x_i \right)^2}{40} \right) = 9 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=61}^{100} x_i^2}{40} - \frac{\left(\sum_{i=61}^{100} x_i \right)^2}{40^2} = 9 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=61}^{100} x_i^2}{40} = 9 + \bar{x}_\Gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=61}^{100} x_i^2 = 40 \cdot 909 = 36.360$$

$$\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = \sum_{i=1}^{60} x_i^2 + \sum_{i=61}^{100} x_i^2 = 98.160 + 36.360 = 134.520$$

Η συνολική διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{1}{100} \left(\sum_{i=1}^{100} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{100} x_i \right)^2}{100} \right) = \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i^2}{100} - \bar{x}^2 = \frac{134.520}{100} - 36^2 = 49,2 \Leftrightarrow s = \sqrt{49,2} \approx 7,01$$

Ο συντελεστής μεταβολής όλων των ηλικιών είναι: $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{7,01}{36} = 0,19 = 19\%$

$$18. \bar{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{2 + \alpha + 1 + \beta + 10}{5} = 4 \Leftrightarrow \alpha + \beta + 13 = 20 \Leftrightarrow \alpha = 7 - \beta \quad (1)$$

$$CV = \frac{\sqrt{10}}{4} \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{10}}{4} \Leftrightarrow \frac{s}{4} = \frac{\sqrt{10}}{4} \Leftrightarrow s = \sqrt{10} \Leftrightarrow s^2 = 10 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{5} \left[(2-4)^2 + (\alpha-4)^2 + (1-4)^2 + (\beta-4)^2 + (10-4)^2 \right] = 10 \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$4 + (7-\beta-4)^2 + 9 + \beta^2 - 8\beta + 16 + 36 = 50 \Leftrightarrow \beta^2 - 6\beta + 9 + \beta^2 - 8\beta + 65 = 50 \Leftrightarrow$$

$$2\beta^2 - 14\beta + 24 = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 7\beta + 6 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1 \text{ ή } \beta = 6.$$

Αν $\beta = 1$, τότε $\alpha = 6$ που απορρίπτεται αφού $\alpha < \beta$.

Αν $\beta = 6$, τότε $\alpha = 1$ που είναι δεκτό.

19. α) Εστω $\bar{x}'$ η μέση τιμή των 5 πρώτων αριθμών και $\bar{x}$ η συνολική μέση τιμή. Τότε:

$$\bar{x}' = \frac{15+18+21+22+24}{5} = 20 \text{ και}$$

$$\bar{x} = \frac{15+18+21+22+24+k \cdot 20}{5+k} = \frac{100+20k}{5+k} = \frac{20(5+k)}{5+k} = 20 = \bar{x}'$$

$$\beta) s^2 = \frac{1}{5} \left[(15-20)^2 + (18-20)^2 + (21-20)^2 + (22-20)^2 + (24-20)^2 \right] = 10$$

$$s^2 = \frac{1}{5+k} \left[(15-20)^2 + (18-20)^2 + (21-20)^2 + (22-20)^2 + (24-20)^2 + k(20-20)^2 \right] = \frac{50}{5+k} \Leftrightarrow$$

$$s_{\text{ολ}}^2 = \frac{5s^2}{5+k}$$

$$\gamma) CV = \frac{s_{\text{ολ}}}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{\frac{50}{5+k}}}{10} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{50}{5+k}} = 1 \Leftrightarrow \frac{50}{5+k} = 1 \Leftrightarrow 50 = 5+k \Leftrightarrow k = 45$$

$$20. \alpha) \text{ Για τη μέση τιμή των παρατηρήσεων } x_1, x_2, \dots, x_9, \text{ ισχύει: } \frac{\sum_{i=1}^9 x_i}{9} = 10 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^9 x_i = 90$$

$$\text{Για τη μέση τιμή και των 10 παρατηρήσεων έχουμε: } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^9 x_i + 15}{10} = \frac{90+15}{10} = 10,5.$$

β) Για τη διακύμανση των 9 παρατηρήσεων έχουμε:

$$s_9^2 = \frac{1}{9} \left(\sum_{i=1}^9 x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^9 x_i \right)^2}{10} \right) = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i^2 - \bar{x}_9^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^9 x_i^2 - 100 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^9 x_i^2 = 1010$$

$$\text{Είναι } \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = \sum_{i=1}^9 x_i^2 + x_{10}^2 = 1010 + 15^2 = 1235.$$

Για την νέα διακύμανση, έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{10} \left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2}{10} \right) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \bar{x}^2 \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{1}{10} 1235 - 10,5^2 = 123,5 - 110,25 = 13,25 \Leftrightarrow s = \sqrt{13,25}$$

γ) Ο συντελεστής μεταβολής του νέου δείγματος είναι: $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{13,25}}{10,5}$

Για να είναι το νέο δείγμα τιμών ομοιογενές, πρέπει:

$$CV \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{\sqrt{13,25}}{10,5} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{13,25}}{10,5} \right)^2 \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{13,25}{110,25} \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow 132,5 \leq 110,25 \text{ που}$$

είναι αδύνατο, οπότε το νέο δείγμα τιμών δεν είναι ομοιογενές.

21. α) Για το μέσο χρόνο χρήσης του κινητού, ισχύει ότι: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{26} x_i}{26} = \frac{910}{26} = 35$ λεπτά.

Για τη διακύμανση των χρόνων χρήσης του κινητού, ισχύει:

$$s^2 = \frac{1}{26} \left(\sum_{i=1}^{26} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{26} x_i \right)^2}{26} \right) = \frac{\sum_{i=1}^{26} x_i^2}{26} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{26} x_i}{26} \right)^2 = \frac{32.084}{26} - \bar{x}^2 = 1234 - 1225 = 9 \Leftrightarrow s = 3$$

β) Η νέα μέση τιμή είναι $\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{26} x_i + 37 + 33}{28} = \frac{910 + 70}{28} = 35$, δηλαδή δεν μεταβάλλεται.

$$\sum_{i=1}^{28} x_i^2 = \sum_{i=1}^{26} x_i^2 + 37^2 + 33^2 = 32.084 + 1369 + 1089 = 34.542$$

Η νέα διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{1}{28} \left(\sum_{i=1}^{28} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{28} x_i \right)^2}{28} \right) = \frac{\sum_{i=1}^{28} x_i^2}{28} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{28} x_i}{28} \right)^2 = \frac{34.542}{28} - \bar{x}_1^2 = 1233,64 - 1225 = 8,64 \Leftrightarrow$$

$s \approx 2,94$. Η τυπική απόκλιση των τιμών ελλατώθηκε.

22. α) Είναι $CV \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow 10s \leq \bar{x} \Leftrightarrow 100s^2 \leq (\bar{x})^2 \Leftrightarrow$

$$100 \frac{1}{10} \left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2}{10} \right) \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} \right)^2 \Leftrightarrow 10 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2}{10} \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2}{100} \Leftrightarrow$$

$$10 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2}{100} \Leftrightarrow 10 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2}{100} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2}{10} \Leftrightarrow$$

$$10 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \leq \frac{101}{100} \left(\sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2 \Leftrightarrow 1000 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \leq 101 \left(\sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2$$

β) $\bar{x} = 20 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 20 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i = 200$

Η σχέση του προηγούμενου ερωτήματος γίνεται:

$$1000 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \leq 101 \left(\sum_{i=1}^{10} x_i \right)^2 \Leftrightarrow 1000 \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \leq 101 \cdot 200^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i^2 \leq \frac{101 \cdot 200 \cdot 200}{1000} = 4040$$

Άρα η μέγιστη τιμή του αθροίσματος $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2$, είναι 4040.

23. α) Έστω $x_1 = x$, τότε $x_2 = x+1$, $x_3 = x+2$, $x_4 = x+3$, $x_5 = x+4$

Η μέση τιμή τους είναι: $\bar{x} = \frac{x+x+1+x+2+x+3+x+4}{5} = x+2$.

Για τη διακύμανση τους έχουμε: $s^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow$

$$s^2 = \frac{1}{5} \left[(x-x-2)^2 + (x+1-x-2)^2 + (x+2-x-2)^2 + (x+3-x-2)^2 + (x+4-x-2)^2 \right] \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{1}{5} (4+1+1+4) = 2 \Leftrightarrow s = \sqrt{2}$$

β) Πρέπει $CV \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{x+2} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow 10\sqrt{2} \leq x+2 \Leftrightarrow x \geq 10\sqrt{2} + 2 \approx 16,14$

Άρα $x_{\min} = 17$ και οι μικρότερες τιμές των 5 ακεραίων είναι 17, 18, 19, 20, 21.

24. Προφανώς για να μπορεί το δείγμα των μισών να χωριστεί σε δύο ισοπληθής ομάδες, το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτις αριθμός. Έστω $2v$ το πλήθος των παρατηρήσεων. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_v$ οι μισές παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και διακύμανση s_A^2 . Τότε:

$$s_A^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2 = v s_A^2 \quad (1)$$

Έστω $x_{v+1}, x_{v+2}, \dots, x_{2v}$ οι άλλες μισές παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και διακύμανση s_B^2 .

$$\text{Τότε: } s_B^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=v+1}^{2v} (x_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow \sum_{i=v+1}^{2v} (x_i - \bar{x})^2 = v s_B^2 \quad (2)$$

$$s^2 = \frac{1}{2v} \sum_{i=1}^{2v} (x_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2v} \left[\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=v+1}^{2v} (x_i - \bar{x})^2 \right] = s^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2v} (v s_A^2 + v s_B^2) = s^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} s_A^2 + \frac{1}{2} s_B^2 = s^2 \Leftrightarrow s_A^2 + s_B^2 = 2s^2$$

25. Επειδή $s_A < \frac{1}{2} \cdot s_B$, είναι $s_A < s_B$ (1)

$$\text{Επειδή } \frac{\bar{x}_A}{\bar{x}_B} > 3 \Leftrightarrow \bar{x}_A > 3\bar{x}_B, \text{ είναι } \bar{x}_A > \bar{x}_B \Leftrightarrow \frac{1}{\bar{x}_A} < \frac{1}{\bar{x}_B} \text{ (2)}$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1),(2), έχουμε:

$$s_A \frac{1}{\bar{x}_A} < s_B \frac{1}{\bar{x}_B} \Leftrightarrow \frac{s_A}{\bar{x}_A} < \frac{s_B}{\bar{x}_B} \Leftrightarrow CV_A < CV_B$$

Άρα το A είναι πιο ομοιογενές.

26. Για τη μέση τιμή των παρατηρήσεων, έχουμε: $\bar{x} = \frac{\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2}{v_1 + v_2}$

$$\text{Είναι: } s^2 = \frac{1}{v_1 + v_2} \sum_{i=1}^2 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\left(\alpha - \frac{\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2}{v_1 + v_2} \right)^2 v_1 + \left(\beta - \frac{\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2}{v_1 + v_2} \right)^2 v_2}{v_1 + v_2} \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{\left(\frac{\alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2 - \alpha \cdot v_1 - \beta \cdot v_2}{v_1 + v_2} \right)^2 v_1 + \left(\frac{\beta \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 - \alpha \cdot v_1 - \beta \cdot v_2}{v_1 + v_2} \right)^2 v_2}{v_1 + v_2} \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{\left(\frac{v_2(\alpha - \beta)}{v_1 + v_2} \right)^2 v_1 + \left(\frac{-v_1(\alpha - \beta)}{v_1 + v_2} \right)^2 v_2}{v_1 + v_2} = \frac{v_1 v_2^2 (\alpha - \beta)^2}{(v_1 + v_2)^2} + \frac{v_1^2 v_2 (\alpha - \beta)^2}{(v_1 + v_2)^2} \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{v_1 v_2^2 (\alpha - \beta)^2 + v_1^2 v_2 (\alpha - \beta)^2}{(v_1 + v_2)^2} = \frac{v_1 v_2 (\alpha - \beta)^2 (v_1 + v_2)}{(v_1 + v_2)^2} = \frac{v_1 v_2 (\alpha - \beta)^2}{(v_1 + v_2)}$$

$$s \leq \frac{\beta - \alpha}{2} \Leftrightarrow s^2 \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{v_1 v_2 (\alpha - \beta)^2}{(v_1 + v_2)} \leq \frac{(\alpha - \beta)^2}{4} \Leftrightarrow 4v_1 v_2 \leq (v_1 + v_2)^2 \Leftrightarrow$$

$$4v_1 v_2 \leq v_1^2 + 2v_1 v_2 + v_2^2 \Leftrightarrow v_1^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2 \geq 0 \Leftrightarrow (v_1 - v_2)^2 \geq 0 \text{ ισχύει}$$

27. Εστω $x, x+2, x+4, x+6, x+8, x+10, x+12, x+14$ οι οκτώ διαδοχικοί περιττοί ακέραιοι.

$$\text{Είναι } \bar{x} = 64 \Leftrightarrow \frac{\kappa + x + x + 2 + x + 4 + x + 6 + x + 8 + x + 10 + x + 12 + x + 14}{9} = 64 \Leftrightarrow$$

$$\kappa + 8x + 56 = 576 \Leftrightarrow \kappa = 520 - 8x$$

$$\text{Είναι } 50 < \kappa < 80 \Leftrightarrow 50 < 520 - 8x < 80 \Leftrightarrow -470 < -8x < -450 \Leftrightarrow \frac{470}{8} > x > \frac{450}{8} \Leftrightarrow$$

$56,25 < x < 58,75$ Επειδή ο x είναι περιττός ακέραιος, είναι $x = 57$, οπότε

$\kappa = 520 - 8 \cdot 57 = 64$, Οι εννέα αριθμοί είναι οι: 57, 59, 61, 63, 64, 65, 67, 69, 71 και

η διακύμανσή τους είναι:

$$s^2 = \frac{1}{9} [(-7)^2 + (-5)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2] = \frac{168}{9} = 18,666$$

28. Είναι $y_i = \frac{3x_i - \bar{x}}{s} = \frac{3}{s}x_i - \frac{\bar{x}}{s}$.

Εστω $z_i = \frac{3}{s}x_i$, τότε $\bar{z} = \frac{3}{s}\bar{x}$ και $s_z = \frac{3}{s}s = 3$.

Είναι $y_i = z_i - \frac{\bar{x}}{s}$ με $\bar{y} = \bar{z} - \frac{\bar{x}}{s} = \frac{3}{s}\bar{x} - \frac{\bar{x}}{s} = \frac{2\bar{x}}{s} = 2 \frac{1}{\frac{s}{\bar{x}}} = \frac{2}{CV_x}$.

29. Εστω x_i , $i=1,2,\dots,n$ οι αρχικές τιμές με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s .

Εστω $y_i = x_i - \bar{x}$, τότε $\bar{y} = \bar{x} - \bar{x} = 0$ και $s_y = s$.

Εστω $z_i = \frac{y_i}{s} = \frac{1}{s}y_i$, τότε $\bar{z} = \frac{1}{s}\bar{y} = 0$ και $s_z = \frac{1}{s}s = 1$

30. Εστω $\alpha_i = 3x_i$, τότε $\bar{\alpha} = 3\bar{x}$ και $s_\alpha = 3s_x$.

Είναι $z_i = \alpha_i - 12$, οπότε $\bar{z} = \bar{\alpha} - 12 = 3\bar{x} - 12$, $s_z = s_\alpha = 3s_x$ και $CV_z = \frac{s_z}{|\bar{z}|} = \frac{3s_x}{|3\bar{x} - 12|}$.

Εστω $\beta_i = -x_i$, τότε $\bar{\beta} = -\bar{x}$ και $s_\beta = s_x$.

Είναι $y_i = 2 - \beta_i$, οπότε $\bar{y} = 2 - \bar{\beta}$, $s_y = s_\beta = s_x$ και $CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{s_x}{|2 - \bar{x}|}$.

Είναι $CV_y = CV_z \Leftrightarrow \frac{3s_x}{|3\bar{x} - 12|} = \frac{s_x}{|2 - \bar{x}|} \Leftrightarrow |3\bar{x} - 12| = 3|2 - \bar{x}| \Leftrightarrow 3\bar{x} - 12 = \pm 3(2 - \bar{x})$

$3\bar{x} - 12 = 3(2 - \bar{x}) \Leftrightarrow 3\bar{x} - 12 = 6 - 3\bar{x} \Leftrightarrow 6\bar{x} = 18 \Leftrightarrow \bar{x} = 3$ ή

$3\bar{x} - 12 = -3(2 - \bar{x}) \Leftrightarrow 3\bar{x} - 12 = -6 + 3\bar{x}$ αδύνατο.

31. Εστω $\bar{y}$ η μέση τιμή των y_i , τότε $\bar{y} = \bar{x} + 40$.

Είναι $\bar{y} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^K y_i v_i \Leftrightarrow \bar{x} + 40 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^K x_i^2 v_i \Leftrightarrow \bar{x} + 40 = \frac{900}{v}$ (1)

$s^2 = 20 \Leftrightarrow \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^K x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^K x_i v_i \right)^2}{v} \right] = 20 \Leftrightarrow \frac{900}{v} - \left(\frac{\sum_{i=1}^K x_i v_i}{v} \right)^2 = 20 \Leftrightarrow$

$\frac{900}{v} - \bar{x}^2 = 20 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \bar{x} + 40 - \bar{x}^2 = 20 \Leftrightarrow \bar{x}^2 - \bar{x} - 20 = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 5 \text{ ή } \bar{x} = -4 \text{ που απρρίπτεται.}$

Από τη σχέση (1), έχουμε: $5 + 40 = \frac{900}{v} \Leftrightarrow 45v = 900 \Leftrightarrow v = \frac{900}{45} = 20$

32. α) $CV = 20\% \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = \frac{20}{100} \Leftrightarrow \frac{s}{5} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow s = 1$

β) $s^2 = \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^v x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2}{v} \right) = \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} - \left(\frac{\sum_{i=1}^v x_i}{v} \right)^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{3900}{v} - \bar{x}^2 \Leftrightarrow$

$$\frac{3900}{v} = 1 + 25 = 26 \Leftrightarrow v = \frac{3900}{26} = 150$$

γ) Εστω y_i τα χρήματα που ξοδεύουν οι μαθητές του δεύτερου σχολείου. Τότε

$$y_i = 2x_i, i = 1, 2, \dots, 150 \text{ με } \bar{y} = 2\bar{x} = 10 \text{ και } s_y = 2s = 2$$

Ο συντελεστής μεταβολής στο δεύτερο σχολείο είναι: $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{2}{10} = 20\%$, δηλαδή δεν μεταβλήθηκε.

33. α) Εστω $x_i, i = 1, 2, 3, \dots, 100$ τα πραγματικά βάρη των καρπουζιών. Τα βάρη που έδειχνε η ζυγαριά του πωλητή ήταν $y_i = x_i + 2$ με $\bar{y} = 7$ και $s_y = 1$. Όμως $\bar{y} = \bar{x} + 2 \Leftrightarrow 7 = \bar{x} + 2 \Leftrightarrow \bar{x} = 5$ και $s_y = s_x = 1$

β) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 = 2600 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 2600$

$$s^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{100} \left[\sum_{i=1}^{100} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{100} x_i \right)^2}{100} \right] = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{100} x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{100} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i^2 - \bar{x}^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 1 + \bar{x}^2 = 1 + 25 = 26 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 2600$$

34. α) $100s^2 = 16\bar{x}^2 \Leftrightarrow \frac{s^2}{\bar{x}^2} = \frac{16}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{s}{\bar{x}} \right)^2 = \frac{16}{100} \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{10} \Leftrightarrow CV = 40\% > 10\%$, οπότε το

δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

β) Εστω y_i οι τιμές που προκύπτουν από τις x_i αν αυξηθούν κατά c , Τότε

$$y_i = x_i + c, i = 1, 2, \dots, v \text{ με } \bar{y} = \bar{x} + c \text{ και } s_y = s.$$

$$\text{Πρέπει } CV_y \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{s_y}{\bar{y}} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \bar{y} \geq 10s_y \Leftrightarrow \bar{x} + c \geq 10s \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{10} \Leftrightarrow s = \frac{2}{5}\bar{x}, \text{ οπότε η (1) γίνεται: } \bar{x} + c \geq 10 \cdot \frac{2}{5}\bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} + c \geq 4\bar{x} \Leftrightarrow c \geq 3\bar{x}, \text{ άρα } c_{\min} = 3\bar{x}.$$

γ) Επειδή η μέση τιμή των τετραγώνων των παρατηρήσεων της μεταβλητής X είναι 116,

$$\text{ισχύει ότι: } \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} = 116.$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } 100s^2 = 16\bar{x}^2 &\Leftrightarrow 100 \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^v x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2}{v} \right] = 16\bar{x}^2 \Leftrightarrow \\ 100 \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} - 100 \left(\frac{\sum_{i=1}^v x_i}{v} \right)^2 &= 16\bar{x}^2 \Leftrightarrow 100 \cdot 116 - 100\bar{x}^2 = 16\bar{x}^2 \Leftrightarrow 100 \cdot 116 = 116\bar{x}^2 \Leftrightarrow \\ \bar{x}^2 &= 100 \stackrel{x_i > 0}{\Leftrightarrow} \bar{x} = 10 \end{aligned}$$

35. α) Εστω x_i , $i=1,2,\dots,v$ οι σημερινές ηλικίες αυτής της ομάδας ανθρώπων, με μέση τιμή

$$\bar{x} \text{ και τυπική απόκλιση } s. \text{ Είναι } CV_1 = 8\% \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = 0,08 \Leftrightarrow s = 0,08\bar{x}$$

Εστω y_i οι ηλικίες τους 15 χρόνια πριν. Τότε $y_i = x_i - 15$, με $\bar{y} = \bar{x} - 15$ και $s_y = s$.

$$\text{Είναι } CV_2 = 20\% \Leftrightarrow \frac{s_y}{\bar{y}} = 0,20 \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x} - 15} = 0,2 \Leftrightarrow 0,08\bar{x} = 0,20\bar{x} - 3 \Leftrightarrow 0,12\bar{x} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{3}{\frac{0,12}{100}} = 25 \text{ χρόνια και } s = 0,08 \cdot 25 = 2.$$

β) Εστω ότι πριν από t χρόνια η ηλικία των ανθρώπων αυτής της ομάδας παρουσίασε για πρώτη φορά ομοιογένεια. Τότε οι ηλικίες τους ήταν $z_i = x_i - t$ με $\bar{z} = \bar{x} - t = 25 - t$ και $s_z = s = 2$. Ο συντελεστής μεταβολής στη περίπτωση αυτή είναι:

$$CV_3 = \frac{s_z}{\bar{z}} = \frac{s}{\bar{x} - t} = \frac{2}{25 - t} \text{ και επειδή το δείγμα ήταν για πρώτη φορά ομοιογενές, ισχύει}$$

$$\text{ότι: } CV_3 = 10\% \Leftrightarrow \frac{2}{25 - t} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow 20 = 25 - t \Leftrightarrow t = 5$$

Το δείγμα παρουσίασε για πρώτη φορά ομοιογένεια, πριν από 5 χρόνια.

$$\begin{aligned} \gamma) s^2 = 4 &\Leftrightarrow \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^v x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2}{v} \right] = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2}{v} = 4 \Leftrightarrow \bar{x}^2 = 4 \Leftrightarrow \\ \frac{25 \cdot 160}{v} &= 25^2 + 4 = 629 \Leftrightarrow v = \frac{25 \cdot 160}{629} = 40 \end{aligned}$$

$$\mathbf{36. \alpha)} s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow \frac{4}{9} = \frac{1}{v} \left(v - \sum_{i=1}^v x_i \right) \Leftrightarrow \frac{4}{9} = 1 - \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{5}{9}$$

$$\mathbf{\beta)} CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{\frac{5}{9}} = \frac{6}{5} = 1,2 = 120\% > 10\%, \text{ οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.}$$

$$\gamma) \text{ Είμαι } s^2 = \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^v x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2}{v} \right) \Leftrightarrow s^2 = \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} - \left(\frac{\sum_{i=1}^v x_i}{v} \right)^2 \Leftrightarrow s^2 = \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} - \bar{x}^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} = s^2 + \bar{x}^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^v x_i^2 = v(s^2 + \bar{x}^2) \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i}{v} \Leftrightarrow v = \frac{\sum_{i=1}^v x_i}{\bar{x}}, \text{ οπότε η (1) γίνεται:}$$

$$\sum_{i=1}^v x_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^v x_i}{\bar{x}} (s^2 + \bar{x}^2) \Leftrightarrow \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^v x_i^2 = (s^2 + \bar{x}^2) \cdot \sum_{i=1}^v x_i$$

$$\delta) \text{ Είμαι } s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow \frac{4}{9} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v \left(x_i - \frac{5}{9} \right)^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^v \left(x_i - \frac{5}{9} \right)^2 = \frac{4v}{9}$$

$$\text{Είμαι } \left(x_i - \frac{5}{9} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^v \left(x_i - \frac{5}{9} \right)^2 = v s^2 = \frac{4v}{9} \Leftrightarrow \left| x_i - \frac{5}{9} \right| \leq \frac{2\sqrt{v}}{3} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{2\sqrt{v}}{3} \leq x_i - \frac{5}{9} \leq \frac{2\sqrt{v}}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{9} - \frac{2\sqrt{v}}{3} \leq x_i \leq \frac{5}{9} + \frac{2\sqrt{v}}{3} \Leftrightarrow \frac{5-6\sqrt{v}}{9} \leq x_i \leq \frac{5+6\sqrt{v}}{9}$$

$$\epsilon) \text{ Από τη σχέση (1) έχουμε: } \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2}{v} = s^2 + \bar{x}^2 \Leftrightarrow \bar{y} = \frac{4}{9} + \frac{25}{81} = \frac{61}{81}$$

37. α) Εστω c το πλάτος των κλάσεων. Τότε η πρώτη κλάση θα είναι η $[10, 10+c)$, η δεύτερη κλάση η $[10+c, 10+2c)$, η τρίτη $[10+2c, 10+3c)$, η τέταρτη $[10+3c, 10+4c)$ και η πέμπτη $[10+4c, 10+5c]$.
Είμαι $10+4c=18 \Leftrightarrow c=2$

- β) Εστω $F_2\% = x$, τότε $f_3\% = F_3\% - F_2\% = 60 - x$ και $f_2\% = F_2\% - f_1\% = x - 10$

Για τον μέσο όρο των βαθμών, ισχύει:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i f_i = \sum_{i=1}^5 \frac{x_i f_i\%}{100} \Leftrightarrow$$

Βαθμοί [... - ...)	x_i	$F_i\%$	$f_i\%$
10-12	11	10	10
12-14	13	35	25
14-16	15	60	25
16-18	17	80	20
18-20	19	100	20

$$\bar{x} = \frac{11 \cdot 10 + 13(x-10) + 15(60-x) + 17 \cdot 20 + 19 \cdot 20}{100} \Leftrightarrow$$

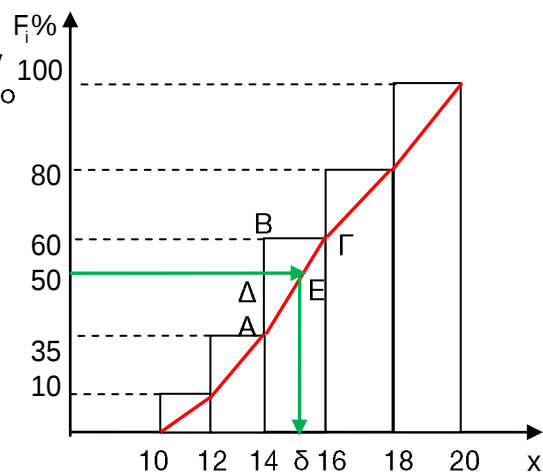
$$\bar{x} = \frac{1600 - 2x}{100} = 15,3 \Leftrightarrow 1600 - 2x = 1530 \Leftrightarrow x = 35$$

Άρα $F_2\% = 35$, $f_2\% = 25$, $f_3\% = 25$.

γ) Αρχικά κατασκευάζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων. Η οριζόντια γραμμή στο 50% τέμνει το πολύγωνο στο Ε. Η διάμεσος είναι τιμή του διαστήματος 14 -16.

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ} \Leftrightarrow \frac{50-35}{60-35} = \frac{\delta-14}{16-14} \Leftrightarrow \frac{15}{25} = \frac{\delta-14}{2} \Leftrightarrow \delta-14=1,5 \Leftrightarrow \delta=15,5$$



δ) Από 13 έως 14 βρίσκεται το $\frac{1}{4}f_2\% = 6,25\%$ των βαθμών, από 14 έως 16 το 25% των βαθμών και από 16 έως 17 το $\frac{1}{4}f_4\% = 5\%$ των βαθμών. Άρα από 13 έως 17 βρίσκεται το $6,25\% + 25\% + 5\% = 36,25\%$ των βαθμών.

ε) Για τη διακύμανση των παρατηρήσεων, έχουμε:

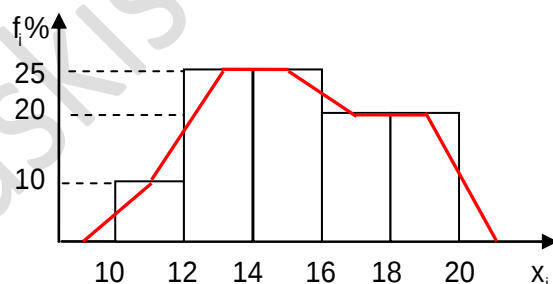
$$s^2 = \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^v x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^v x_i v_i \right)^2}{v} \right) = \frac{\sum_{i=1}^v x_i^2 v_i}{v} - \left(\frac{\sum_{i=1}^v x_i v_i}{v} \right)^2 = \sum_{i=1}^v x_i^2 f_i - (\bar{x})^2$$

Είναι $\sum_{i=1}^v x_i^2 f_i = 11^2 \cdot 0,10 + 13^2 \cdot 0,25 + 15^2 \cdot 0,25 + 17^2 \cdot 0,20 + 19^2 \cdot 0,20 = 240,6$, άρα

$$s^2 = 240,6 - 15,3^2 = 6,51 \Leftrightarrow s = \sqrt{6,51} = 2,55$$

$$CV = \frac{2,55}{15,3} \approx 16,67\%$$

στ)



Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το πολύγωνο και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων επί της%, δηλαδή $E = 100$.

ζ) Αν όλοι οι βαθμοί της κλάσης $[10,12)$ αυξηθούν κατά 2 μονάδες, τότε η κλάση θα γίνει $[12,14)$ και η κλάση $[10,12)$ θα πάψει να υπάρχει. Όμοια οι βαθμοί της κλάσης $[12,14)$ θα προστεθούν σε αυτούς της κλάσης $[14,16)$, οπότε η

κλάση αυτή θα έχει σχετική συχνότητα $25\% + 25\% = 50\%$

Το νέο δείγμα βαθμών φαίνεται στο διπλανό πίνακα και η μέση τιμή του είναι:

$$\bar{x}' = 13 \cdot 0,10 + 15 \cdot 0,50 + 17 \cdot 0,20 + 19 \cdot 0,20 = 16$$

Βαθμοί [... - ...)	x_i	$F_i\%$	$f_i\%$
12-14	13	10	10
14-16	15	60	50
16-18	17	80	20
18-20	19	100	20

$$\text{η) } s^2 = (13-16)^2 \cdot 0,10 + (15-16)^2 \cdot 0,50 + (17-16)^2 \cdot 0,20 + (19-16)^2 \cdot 0,20 = 3,4 \Leftrightarrow s = 1,84$$

Αν η κατανομή ήταν κανονική τότε στο διάστημα $(\bar{x}, \bar{x} + s)$ δηλαδή στο διάστημα $(6, 17,84)$ θα βρίσκονταν το 34% των τιμών. Αυτό όμως δεν συμβαίνει γιατί στο διάστημα $[16,18)$ βρίσκεται μόλις το 20% των τιμών.

$$38. \alpha) \left\{ \begin{array}{l} t_1 = t_1 \leq t_v \\ t_1 \leq t_2 \leq t_v \\ t_1 \leq t_3 \leq t_v \quad (+) \\ \dots \Rightarrow vt_1 \leq t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_v \leq vt_v \Leftrightarrow t_1 \leq \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_v}{v} \leq t_v \Leftrightarrow t_1 \leq \bar{x} \leq t_v \\ \dots \\ t_1 \leq t_v = t_v \end{array} \right.$$

β) Εστω ότι υπάρχει $t_i \neq t_v$, τότε επειδή $t_i \leq t_v, i=1,2,\dots,v$, θα είναι $t_i < t_v$, τότε

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 \leq t_v \\ t_2 \leq t_v \\ t_3 \leq t_v \\ \dots \quad (+) \\ \dots \Rightarrow t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_v < vt_v \Leftrightarrow \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_v}{v} < t_v \Leftrightarrow \bar{x} < t_v \text{ που είναι άτοπο.} \\ \dots \\ t_i < t_v \\ \dots \\ t_v = t_v \end{array} \right.$$

Άρα $t_1 = t_2 = \dots = t_v$

$$\gamma) \bar{x} - s\sqrt{v} \leq t_i \leq \bar{x} + s\sqrt{v} \Leftrightarrow -s\sqrt{v} \leq t_i - \bar{x} \leq s\sqrt{v} \Leftrightarrow |t_i - \bar{x}| \leq s\sqrt{v} \Leftrightarrow (t_i - \bar{x})^2 \leq vs^2 \Leftrightarrow$$

$$(t_i - \bar{x})^2 \leq v \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow (t_i - \bar{x})^2 \leq \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2 \text{ που ισχύει.}$$

$$39. \alpha) CV = 20\% \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = 5s \quad (1)$$

$$s^2 = \frac{1}{1000} \left(\sum_{i=1}^{1000} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{1000} x_i \right)^2}{1000} \right) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} x_i^2 - \bar{x}^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{1000} x_i^2 = 1000(s^2 + \bar{x}^2) \quad (1)$$

$$104.000 = 1000(s^2 + 25s^2) \Leftrightarrow 104 = 26s^2 \Leftrightarrow s^2 = 4 \Leftrightarrow s = 2. \text{ Τότε } \bar{x} = 5 \cdot 2 = 10.$$

β) Εστω ότι σε όλες τις τιμές προστίθεται σταθερά c . Τότε για τις νέες τιμές ισχύει:
 $y_i = x_i + c, i=1,2,\dots,1000.$

Είναι $\bar{y} = \bar{x} + c = 10 + c$ και $s_y = s_x = s = 2.$

Για να είναι το δείγμα των νέων τιμών οριακά ομοιογενές, πρέπει:

$$CV_y = 10\% \Leftrightarrow \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{10+c} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow 20 = 10+c \Leftrightarrow c = 10$$

$$\gamma) (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 10)^2 + \dots + (x_{1000} - 10)^2 = 4000 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{1000} (x_i - 10)^2 = 4000 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (x_i - 10)^2 = 4 \Leftrightarrow s^2 = 4 \text{ που ισχύει.}$$

$$\delta) (x_i - 10)^2 \leq \sum_{i=1}^{1000} (x_i - 10)^2 = 1000s^2 = 4000 \Leftrightarrow |x_i - 10| \leq 20\sqrt{10} \Leftrightarrow$$

$$-20\sqrt{10} \leq x_i - 10 \leq 20\sqrt{10} \Leftrightarrow 10 - 20\sqrt{10} \leq x_i \leq 10 + 20\sqrt{10} \Leftrightarrow$$

$$10(1 - 2\sqrt{10}) \leq x_i \leq 10(1 + 2\sqrt{10}).$$

ε) Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μία ομάδα τιμών είναι οι παρατηρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_{500}$ με τυπική απόκλιση s_1 και μέση τιμή $\bar{x} = 10$ και η άλλη ομάδα οι $x_{501}, x_{502}, \dots, x_{1000}$ με τυπική απόκλιση s_2 και μέση τιμή $\bar{x} = 10$.

$$\text{Είναι } s_1^2 = \frac{1}{500} \left(\sum_{i=1}^{500} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{500} x_i \right)^2}{500} \right) = \frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} x_i^2 - 100 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{500} x_i^2 = 500s_1^2 + 50.000 \text{ και}$$

$$s_2^2 = \frac{1}{500} \left(\sum_{i=501}^{1000} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=501}^{1000} x_i \right)^2}{500} \right) = \frac{1}{500} \sum_{i=501}^{1000} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{500} \sum_{i=501}^{1000} x_i^2 - 100 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=501}^{1000} x_i^2 = 500s_2^2 + 50.000 \text{ και}$$

$$\sum_{i=1}^{1000} x_i^2 = 104.000 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{500}^2 + x_{501}^2 + \dots + x_{1000}^2 = 104.000 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{500} x_i^2 + \sum_{i=501}^{1000} x_i^2 = 104.000 \Leftrightarrow 500s_1^2 + 50.000 + 500s_2^2 + 50.000 = 104.000 \Leftrightarrow$$

$$500(s_1^2 + s_2^2) = 4000 \Leftrightarrow s_1^2 + s_2^2 = 8$$

$$\sigma) \sum_{i=1}^{1000} (x_i^2 - 5x_i - 4) = x_1^2 - 5x_1 - 4 + x_2^2 - 5x_2 - 4 + \dots + x_{1000}^2 - 5x_{1000} - 4 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{1000} (x_i^2 - 5x_i - 4) = \sum_{i=501}^{1000} x_i^2 - 5 \sum_{i=501}^{1000} x_i - 4 \cdot 1000 = 104.000 - 5 \cdot 10.000 - 4.000 = 50.000$$

40. α) Εστω κ το πλήθος των κλάσεων. Τότε

$$\frac{c}{2} + \kappa c + \frac{c}{2} = 45 - 5 \Leftrightarrow \kappa c + c = 40 \Leftrightarrow (\kappa + 1)c = 40 \quad (1)$$

Επειδή το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων κατασκευάζεται από τα μέσα των $\kappa + 1$ ιστών το μήκος της βάσης είναι $\kappa + 1$, οπότε το εμβαδόν του τριγώνου είναι:

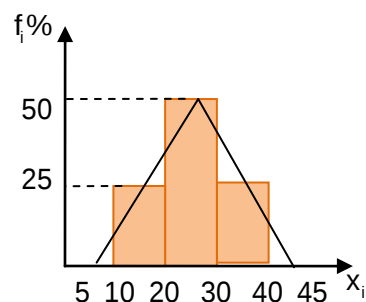
$$(OAB) = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}(\kappa+1)50 = 25(\kappa+1).$$

$$\text{Όμως } (OAB) = 100 \Leftrightarrow 25(\kappa+1) = 100 \Leftrightarrow \kappa+1=4 \Leftrightarrow \kappa=3 \text{ και}$$

$$\text{από την (1)} \Rightarrow 4c = 40 \Leftrightarrow c = 10$$

$$\beta) f_2\% = 100 - f_1\% - f_3\% = 50$$

Η πρώτη κλάση είναι η $\left[5 + \frac{c}{2}, 5 + \frac{3c}{2}\right) = [10, 20)$, η δεύτερη $[20, 30)$ και η τρίτη $[30, 40)$.



$$\gamma) R = 40 - 10 = 30.$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^3 x_i f_i = 15 \cdot 0,25 + 25 \cdot 0,50 + 35 \cdot 0,25 = 21,25$$

$$s^2 = \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^3 x_i v_i \right)^2}{3} \right) = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i^2 v_i}{v} - \left(\frac{\sum_{i=1}^3 x_i v_i}{v} \right)^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 f_i - \bar{x}^2 \Leftrightarrow$$

$$s^2 = 225 \cdot 0,25 + 625 \cdot 0,50 + 1225 \cdot 0,25 - (21,25)^2 = 223,4375 \Leftrightarrow$$

$$s \approx 14,95$$

Κλάσεις	x_i	f_i
$[10, 20)$	15	0,25
$[20, 30)$	25	0,50
$[30, 40)$	35	0,25
Σύνολο		1

$$\delta) s^2 = \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^3 x_i v_i \right)^2}{v} \right) = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i^2 v_i}{v} - \bar{x}^2 \Leftrightarrow 223,44 + (21,25)^2 = \frac{27.000}{v} \Leftrightarrow$$

$$675 = \frac{27.000}{v} \Leftrightarrow v = \frac{27.000}{675} = 40$$

$$\epsilon) \text{Είναι } A = \frac{x_1^2 v_1 + x_2^2 v_2 + \dots + x_k^2 v_k}{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i}{\sum_{i=1}^k x_i v_i}, \text{ όμως}$$

$$s^2 = \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right) = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i}{v} - \bar{x}^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i = v(s^2 + \bar{x}^2) \text{ και}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i v_i}{v} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k x_i v_i = v\bar{x}, \text{ άρα } A = \frac{x_1^2 v_1 + x_2^2 v_2 + \dots + x_k^2 v_k}{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k} = \frac{v(s^2 + \bar{x}^2)}{v\bar{x}} = \frac{s^2 + \bar{x}^2}{\bar{x}},$$

οπότε το κλάσμα είναι ανεξάρτητο του v .