

Πιθανότητες

Ισοπίθανα ενδεχόμενα

1. Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε και τις τρεις φορές την ίδια ένδειξη;
2. Δίνονται τα σύνολα $\Omega = \{x \in \mathbb{N}, \text{ όπου } x \leq 8\}$, $A = \{x \in \Omega, \text{ όπου } x \text{ άρτιος}\}$ και $B = \{x \in \Omega, \text{ όπου } x \text{ διαιρέτης του } 8\}$.
 - α) Να γράψετε τα σύνολα Ω , A , B με αναγραφή των στοιχείων τους και να τα παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn.
 - β) Να προσδιορίσετε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ και τα A' , B' ως προς βασικό σύνολο Ω .
 - γ) Αν επιλέξετε τυχαία ένα στοιχείο του Ω , να βρείτε την πιθανότητα:
 - i. να ανήκει στο A
 - ii. να μην ανήκει στο B
 - iii. να ανήκει στο A και στο B
 - iv. να ανήκει στο A ή στο B .
3. Από το σύνολο $\{25^\circ, 36^\circ, 65^\circ, 92^\circ\}$ που περιέχει ως στοιχεία μέτρα γωνιών, επιλέγουμε τυχαία δύο διαφορετικούς αριθμούς. Αν αυτοί εκφράζουν τα μέτρα δύο γωνιών ενός τριγώνου, ποια είναι η πιθανότητα το τρίγωνο αυτό να είναι ορθογώνιο;
4. Από το σύνολο $\{8, 12, 16, 20\}$ επιλέγουμε τυχαία τρεις διαφορετικούς αριθμούς. Ποια η πιθανότητα οι τρεις αυτοί αριθμοί να εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου;
5. Από το σύνολο $\{1, 2, 3, 4\}$ επιλέγουμε τυχαία δύο αριθμούς τον ένα μετά τον άλλο και με αυτούς σχηματίζουμε ένα κλάσμα. Ο πρώτος είναι ο αριθμητής και ο δεύτερος είναι ο παρονομαστής του κλάσματος. Να βρείτε την πιθανότητα ώστε το κλάσμα
 - α) να εκφράζει ακέραιο αριθμό
 - β) να είναι μικρότερο της μονάδας.
6. Επιλέγουμε τυχαία και ταυτόχρονα δύο από τους αριθμούς: $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$. Να βρείτε τη πιθανότητα οι δύο αριθμοί που επιλέχθηκαν να είναι ημίτονο και συνημίτονο της ίδιας γωνίας ω .
7. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 - 2x + 1 = 0$ όπου το a καθορίζεται από τη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού. Να βρείτε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:
 - A: η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.
 - B: η εξίσωση έχει ρίζα το 1.
8. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 - bx + 2 = 0$ όπου τα a, b καθορίζονται από τη ρίψη δύο αμερόληπτων ζαριών. Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση να έχει ρίζα το 2.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - 2x + 3$, όπου το a καθορίζεται από τη ρίζη ενός αμερόληπτου ζαριού. Να βρείτε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:
 Α: η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.
 Β: η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα το 1.
 Γ: η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $K(2,7)$.
 Δ: Η C_f δέχεται στο σημείο $M(1, f(1))$ εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $y = 4x + 1$.
10. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - ax + b = 0$, όπου τα a, b καθορίζονται από τη ρίζη δύο αμερόληπτων ζαριών. Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
11. Επιλέγουμε τυχαία τρεις από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι ρίζες της εξίσωσης $(x^2 - 16)(x^2 - 5x + 6) = 0$.
12. Σε μια συνεστίαση τα $\frac{3}{4}$ των παρευρισκομένων αντρών και τα $\frac{5}{6}$ των γυναικών είναι παντρεμένοι. Αν είναι γνωστό ότι όλα τα αντρώγυνα παρευρίσκονται στη συνεστίαση, να βρείτε την πιθανότητα ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία, να είναι:
 Α: ανύπαντρο Β: ανύπαντρος άντρας ή παντρεμένη γυναίκα.
13. Σε ένα ράφι ενός βιβλιοπωλείου βρίσκονται βιβλία Μαθηματικών και Φυσικής. Αν τα βιβλία Μαθηματικών είναι 5 περισσότερα από τα βιβλία Φυσικής και $P(M), P(F)$ οι αντίστοιχες πιθανότητες τυχαίας εκλογής βιβλίου Μαθηματικών και Φυσικής αντίστοιχα, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό βιβλίων που πρέπει να υπάρχει στο ράφι, ώστε να ισχύει: $P(F) \geq \frac{3}{4}P(M)$.
14. Ένα κουτί περιέχει άγνωστο αριθμό από ομοιόμορφες μπάλες αριθμημένες από 2, 3, ..., n . Επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα. Αν η πιθανότητα η μπάλα ν' αναγράφει άρτιο αριθμό είναι μεγαλύτερη κατά 0,04 από την πιθανότητα, ν' αναγράφει περιττό αριθμό, να βρείτε το n .
15. Ένα κουτί περιέχει 40 μπάλες από τις οποίες οι 20 είναι άσπρες, οι 10 είναι μαύρες και οι υπόλοιπες είναι πράσινες ή κόκκινες. Επιλέγουμε από το κουτί μια μπάλα στη τύχη. Η πιθανότητα να επιλεγεί κόκκινη μπάλα είναι $\frac{\lambda}{3\lambda + 4}$ και πράσινη $\frac{\lambda - 1}{9\lambda + 2}$, $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε πόσες κόκκινες και πόσες πράσινες μπάλες περιέχει το κουτί.

Αξιοματικός ορισμός πιθανότητας

16. Εστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και $\Gamma = \{\omega_1, \omega_3\}$. Αν $P(A) = \frac{7}{8}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ και $P(\Gamma) = \frac{3}{4}$, να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω .

17. Εστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει: $P(\omega_1) = \kappa^2 - \kappa + 1$, $P(\omega_2) = \lambda^2 - 2\kappa$ και $P(\omega_3) = \kappa + 1$.
18. Εστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ και τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ και $\Gamma = \{\omega_1, \omega_3\}$. Αν $P(A) = \lambda$, $P(B) = \frac{\lambda}{2}$ και $P(\Gamma) = \frac{3\lambda}{2}$, $\lambda > 0$ τότε:
- α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = \frac{2}{3}$
- β) Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω .
19. Εστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$ και ω ένα απλό ενδεχόμενο του Ω . Αν για την πιθανότητα $P(\omega)$, ισχύει: $P(\omega) = \begin{cases} \lambda^2, & 1 \leq \omega \leq 4 \\ \lambda, & \omega = 5, \lambda > \frac{1}{6} \\ \frac{6\lambda - 1}{5}, & 5 \leq \omega \leq 10 \end{cases}$
- α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = \frac{1}{4}$.
- β) Να βρείτε τη πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{x \in \Omega / \text{το } x \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 3\}$.
20. Εστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 2\nu\}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Έστω ότι $P(\lambda) = \frac{1}{2^\lambda}$, $\lambda = 1, 2, 3, \dots, 2\nu$.
- α) Να υπολογίσετε τη πιθανότητα $P(0)$.
- β) Να υπολογίσετε τη πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{2, 4, 6, \dots, 2\nu\}$.
21. α) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.
- β) Εστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 100\}$ και η πιθανότητα $P(\lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda+1)}$, $\lambda = 1, 2, \dots, 100$. Να βρείτε τη πιθανότητα $P(0)$.
22. Εστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ και η πιθανότητα $P(\alpha) = \frac{2\alpha - |\alpha|}{100\alpha}$, $\alpha \in \Omega$, $\alpha \neq 0$.
- α) Να βρείτε τη πιθανότητα $P(0)$.
- β) Να βρείτε τη πιθανότητα η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + \alpha$ να παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = \alpha$.

Κανόνες Λογισμού των πιθανοτήτων

23. Εστω A, B ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,5$ και $P(A \cap B) = 0,4$. Να υπολογίσετε τη πιθανότητα του ενδεχομένου:
- Κ: πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα A και B .
- Λ: δεν πραγματοποιείται το A .
- Μ: πραγματοποιείται μόνο το A .

N: πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B.

Σ: δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B.

24. Εστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω . Αν $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A - B) = \frac{1}{6}$ και $P(B - A) = \frac{1}{2}$, να βρείτε τη πιθανότητα $P(A \cup B)$.
25. Εστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A') = 0,7$, $P(B) = 0,4$ και $P[(A - B) \cup (B - A)] = 0,3$. Να βρείτε τη πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B.
26. Εστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$. Αν $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{3}{4}$, να βρείτε τις πιθανότητες:
 α) $P(A \cup B)$ β) $P(B \cap A')$ γ) $P(B \cup A')$
27. Εστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{2}{3}$ και $P(B - A) = \frac{1}{6}$.
 Να βρείτε τις πιθανότητες: α) $P(A \cap (A' \cap B))$ β) $P(A \cup (B \cap A'))$
28. Η πιθανότητα να κερδίσει το πρωτάθλημα ποδοσφαίρου η ομάδα A είναι διπλάσια από τη πιθανότητα να μην το κερδίσει. Να βρείτε τη πιθανότητα η ομάδα A να κερδίσει το πρωτάθλημα.
29. Ο καθηγητής των Μαθηματικών διαπίστωσε ότι στο μάθημα της Γεωμετρίας, από τους 24 μαθητές ενός τμήματος, 18 είχαν κανόνα, 14 είχαν διαβήτη και 20 είχαν κανόνα ή διαβήτη. Αν επιλέξουμε στην τύχη έναν μαθητή, ποια είναι η πιθανότητα να έχει κανόνα και διαβήτη;
30. Μια τάξη έχει 12 αγόρια και 15 κορίτσια. Τα $\frac{2}{3}$ των αγοριών και τα $\frac{3}{5}$ των κοριτσιών έχουν ποδήλατο. Αν επιλέξουμε τυχαία μέσα από την τάξη ένα άτομο, να βρεθεί η πιθανότητα να είναι κορίτσι ή να έχει ποδήλατο.
31. Απο τους 25 μαθητές ενός τμήματος, οι 23 μαθαίνουν Αγγλικά, οι 8 μαθαίνουν Γαλλικά και υπάρχουν 7 μαθητές που μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή μέσα από την τάξη. Να βρείτε τη πιθανότητα να μην μαθαίνει καμιά από τις δύο γλώσσες.
32. Σε μια έκθεση μεταχειρισμένων αυτοκινήτων, το 30% δεν έχει αερόσακο, το 20% δεν έχει καινούργια λάστιχα και το 5% δεν έχει ούτε αερόσακο ούτε καινούργια λάστιχα. Επιλέγουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο της έκθεσης. Να βρείτε τη πιθανότητα να έχει αερόσακο και καινούργια λάστιχα.
33. Εστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ και $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

β) Να βρείτε τη πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B.

34. Εστω A ενδεχόμενο δειγματικού χώρου Ω με $\frac{P(A')}{P(A)} = \frac{2}{5}$. Να βρείτε το $P(A)$.

35. Εστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από 30 ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Αν A ενδεχόμενο του πειράματος για το οποίο ισχύει: $3P^2(A) - 5P(A') + 3 = 0$, να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του A.

36. Εστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει ότι $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Να αποδείξετε ότι: $P[(A \cup B)'] = P(A')P(B')$.

37. Εστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες $P(A), P(B)$ αντίστοιχα. Αν τα $P(A), P(B)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2P(B)x + P(A \cap B) = 0$ και $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(A), P(B), P(A \cap B), P(A - B)$.

Ανισοτικές σχέσεις

38. Εστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες $P(A) = 0,7$ και $P(B) = 0,6$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα

β) $0,3 \leq P(A \cap B) \leq 0,6$

39. Εστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες $P(A) = \frac{2}{3}$ και $P(B) = \frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{1}{6} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$

β) $P(A' \cap B') \leq \frac{1}{3}$

40. Εστω A, B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ για τις οποίες ισχύει: $P(A) + P(B) = \frac{4}{3}$.

α) Να εξετάσετε αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα.

β) Να αποδείξετε ότι: i. $P(A \cap B) \leq \frac{2}{3}$ ii. $P(A \cup B) \geq \frac{2}{3}$.

41. Εστω A, B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω και A', B' τα συμπληρωματικά τους ενδεχόμενα αντίστοιχα. Αν $P(A') \leq 0,28$ και $P(B') \leq 0,71$, να αποδείξετε ότι:

α) $P(A \cap B) \geq 1,01 - P(A \cup B)$

β) $A \cap B \neq \emptyset$

42. Εστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες $P(A) = 0,6$ και

$P(B) = 0,3$. Να αποδείξετε ότι:

α) $P(A' \cap B') \leq 0,4$ β) $P(A \cup B') \geq 0,4$

43. Εστω A, B ασυμβίβαστα ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $P(A) \neq \frac{1}{9}$ και $P(B) = \frac{4P(A)}{9P(A)-1}$.

Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A), P(B)$.

44. Εστω A, B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει ότι

$$P(A \cap B) = \frac{3P(A) + 2P(B)}{5}. \text{ Να αποδείξετε ότι } P(A) = P(B).$$

45. Εστω A μη κενό και μη βέβαιο ενδεχόμενο δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητα $P(A)$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(A')} \geq 4$ β) $\frac{1}{2} \leq P^2(A) + P^2(A') < 1$

46. Εστω A, B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $3P^2(A) \leq P(B)[2P(A) + P(B)]$.

47. Εστω A ενδεχόμενο δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητα $P(A)$ για την οποία ισχύει:

$$|P(A) + 1| - |P(A) - 2| = 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι } |\lambda| \leq \frac{1}{2}.$$

48. Εστω A, B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και

$$P^2(B) - \left(P(A) + \frac{1}{2}\right)P(B) + \frac{P(A)}{2} \leq 0. \text{ Να αποδείξετε ότι } P(B) \leq \frac{1}{2}.$$

49. Εστω A, B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $B \subseteq A$. Να αποδείξετε ότι:

$$2P(A)[2P(A) - P(B)] \geq P^2(A) + P^2(B)$$

50. Εστω A, B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει ότι:

$$P(A) - 2P(A') + 3P(B) \geq 2P(A \cup B) + 2P(A \cap B). \text{ Να αποδείξετε ότι } A = B.$$

51. Εστω A ενδεχόμενο δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητα $P(A) = 3\lambda^2 - 4\lambda + 2$, $\lambda \leq \frac{1}{3}$. Να αποδείξετε

ότι το A είναι βέβαιο ενδεχόμενο.

52. Εστω A, B ασυμβίβαστα ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \lambda^2$ και

$$P(B) = 5\lambda^2 - 7\lambda + 3, \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι } \frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{2}{3}.$$