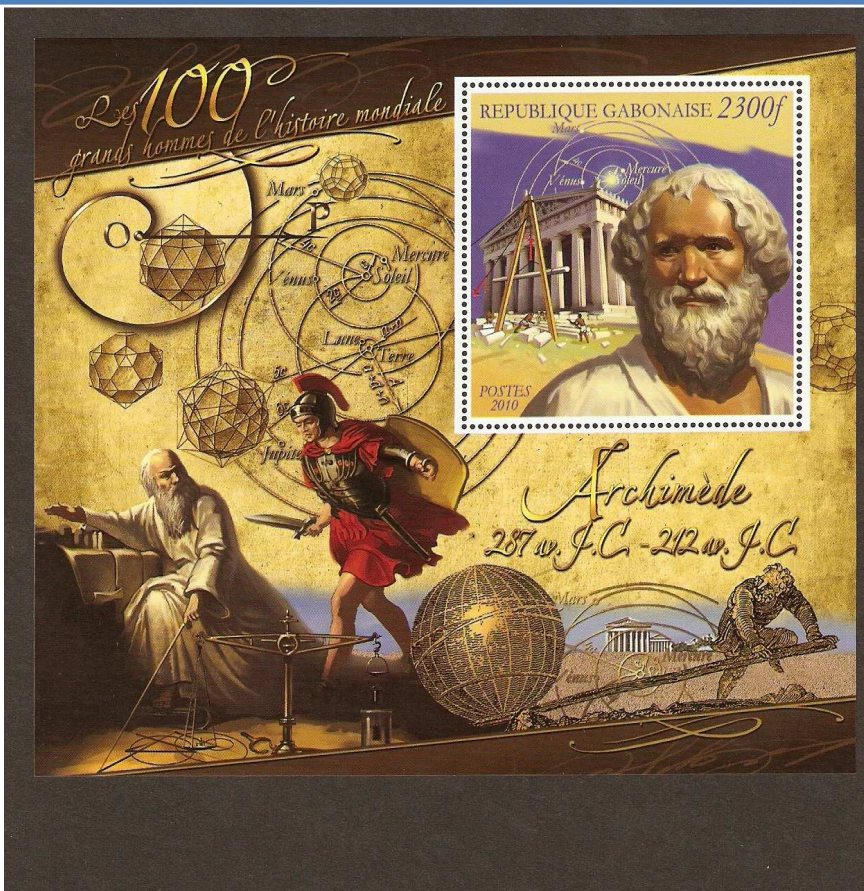


2ο ΓΕΛ ΣΥΚΕΩΝ

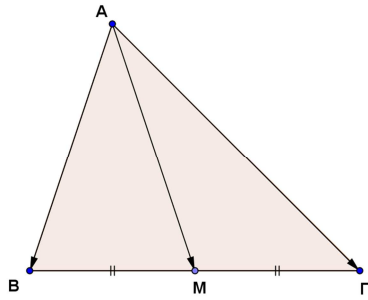
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2013-2013

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΥΚΛΟΣ



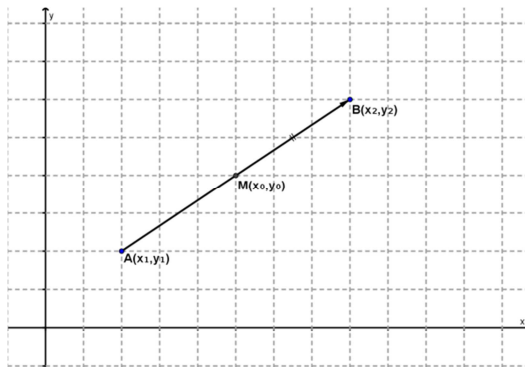
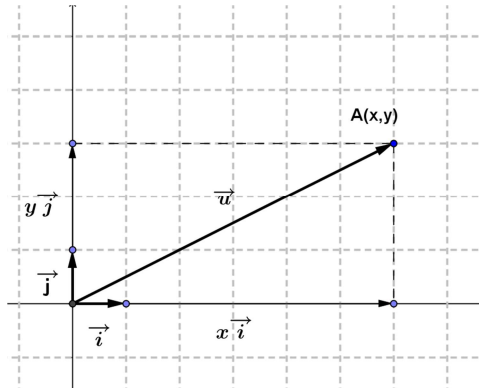
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΧΑΛΑΤΖΙΑΝ ΠΑΥΛΟΣ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ - ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ



- $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma})$

- $\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = (x, y)$
- $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\lambda_{\vec{u}} = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$



- Συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$
- Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος - ευθύγραμμου τμήματος

$$\lambda_{\overrightarrow{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

- Μέτρο διανύσματος - μήκος ευθύγραμμου τμήματος

$$(AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Συντεταγμένες μέσου τμήματος με γνωστά άκρα

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

- Παράλληλεια - καθετότητα διανυσμάτων. $\vec{\alpha} = (x_1, y_1), \quad \vec{\beta} = (x_2, y_2)$

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

- Αν είναι ω η γωνία που σχηματίζει μια ευθεία με τον άξονα $x'x$ με $\omega \neq \frac{\pi}{2}$ τότε αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \tan \omega$.
- Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$
- Κάθε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι: $y = \lambda x$
- Η εξίσωση της διχοτόμου πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου είναι $y=x$
- Η εξίσωση της διχοτόμου δεύτερου και τέταρτου τεταρτημορίου είναι η $y = -x$.
- Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ (1) παριστάνει ευθεία γραμμή αν και μόνο αν A και B όχι συγχρόνως μηδέν.

$$\text{Αν } B \neq 0 \text{ τότε } \lambda = -\frac{A}{B}$$

Αν $B = 0$ και $A \neq 0$ τότε η (1) παριστάνει την κατακόρυφη ευθεία

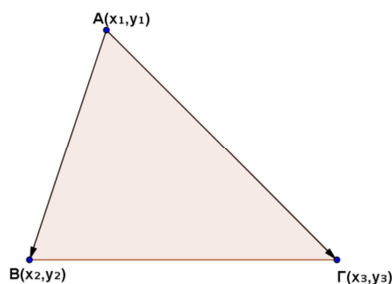
$$x = -\frac{\Gamma}{A}$$

- Απόσταση σημείου από ευθεία

Η απόσταση του σημείου $P(x_0, y_0)$ από την ευθεία $(\varepsilon): Ax + By + \Gamma = 0$ δίνεται

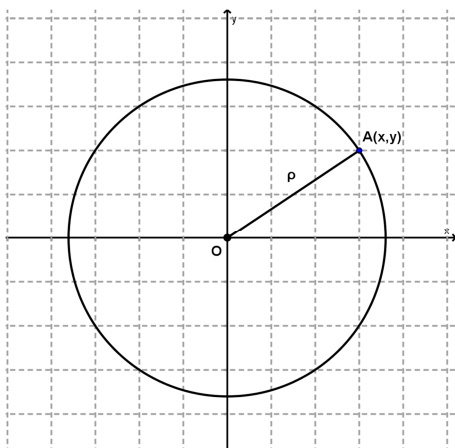
$$\text{από τον τύπο } d(P, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Εμβαδόν τριγώνου



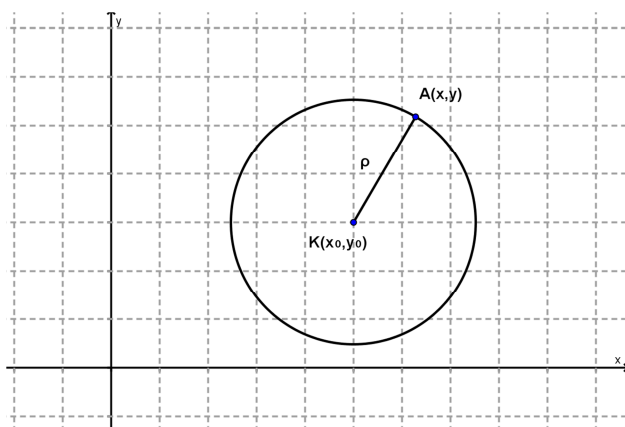
$$E(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{A\Gamma} \end{pmatrix} \right|$$

- **Εξίσωση κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ .**

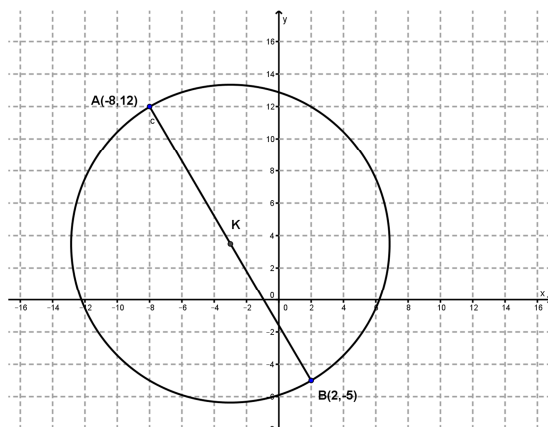


- Ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$ λέγεται μοναδιαίος κύκλος και έχει εξίσωση: $x^2 + y^2 = 1$

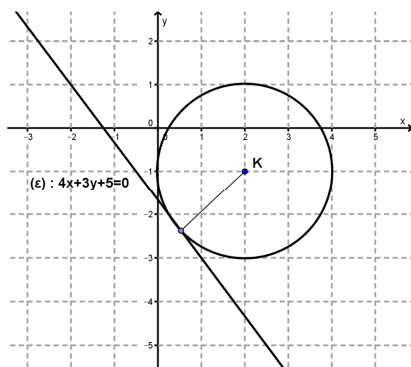
- **Εξίσωση κύκλου με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ .**



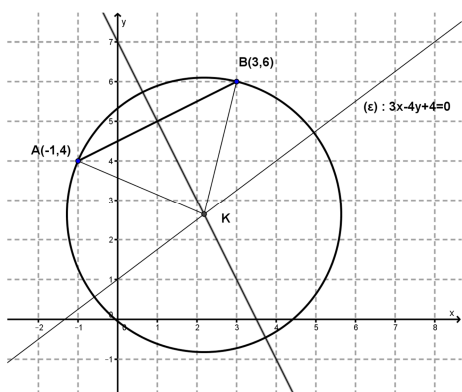
- **Μέθοδος 1**: Εύρεση της εξίσωσης κύκλου όταν γνωρίζω δύο αντιδιαμετρικά του σημεία.



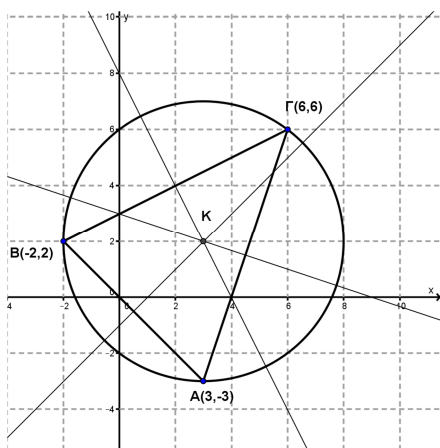
- **Μέθοδος 2 :** Εύρεση της εξίσωσης κύκλου όταν γνωρίζω το κέντρο του και μια εφαπτομένη του.



- **Μέθοδος 3 :** Εύρεση της εξίσωσης κύκλου όταν γνωρίζω δύο σημεία του και μια ευθεία από την οποία διέρχεται το κέντρο του.



- **Μέθοδος 4 :** Εύρεση της εξίσωσης κύκλου όταν γνωρίζω τρία σημεία του.



- **Μέθοδος 5** : Γεωμετρικός τόπος παραμετρικού σημείου που προκύπτει κύκλος.

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου

$$M(4 - 3\eta\mu\theta, 5 + 3\sigma\upsilon\nu\theta) \text{ , όπου } \theta \in \mathbb{R}$$

- **Μέθοδος 6** : Γεωμετρικός τόπος σημείου M για το οποίο ισχύει $\hat{A}MB = 90^\circ$ όπου A και B δύο γνωστά σημεία.

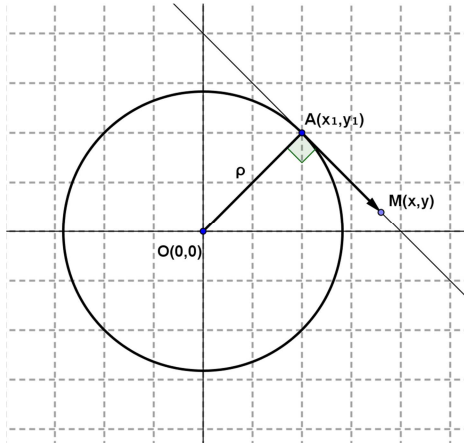
Παράδειγμα: Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M ώστε

$$\hat{A}MB = 90^\circ \text{ όπου } A(8,2) \text{ και } B(14,-6).$$

- **Μέθοδος 7** : Γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών κύκλου που διέρχονται από σταθερό σημείο.

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ που διέρχονται από το σημείο A(3,2).

- Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ σε γνωστό σημείο του



- **Μέθοδος 8 :** Εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ με γνωστό συντελεστή διεύθυνσης.

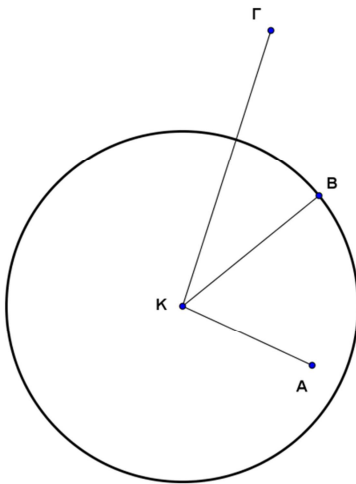
Παράδειγμα: Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 10$ που είναι κάθετες στην ευθεία (δ) : $3x + y - 2014 = 0$

- Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής. Πρέπει $x_1^2 + y_1^2 = 10$ (1)
- Είναι (ε_M) : $x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = 10$
- Πρέπει $\lambda_{\varepsilon_M} = \lambda_{\delta} \Leftrightarrow \frac{-x_1}{y_1} = -3 \Leftrightarrow x_1 = 3y_1$ (2)
- Από το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) έχουμε $(x_1, y_1) = (1, 3)$ ή $(-1, -3)$
- Άρα οι εξισώσεις των ζητούμενων εφαπτομένων του κύκλου είναι: (ε_1) : $x + 3y = 10$ και (ε_2) : $-x - 3y = 10 \Leftrightarrow x + 3y = -10$

-
- **Μέθοδος 9 :** Εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ που διέρχεται από γνωστό σημείο P εκτός αυτού.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 10$ που διέρχονται από το σημείο $P(5,5)$.

• Σχετική θέση σημείου και κύκλου



- Αν είναι $(KA) < \rho$ τότε Α εσωτερικό σημείο του κύκλου.

Ισχύουν: $\min d(A, C) = \rho - (KA)$
 $\max d(A, C) = (KA) + \rho$

- Αν είναι $(KB) = \rho$ τότε Β σημείο πάνω στον κύκλο.

- Αν είναι $(K\Gamma) > \rho$ τότε Γ εξωτερικό σημείο του κύκλου.

Ισχύουν: $\min d(\Gamma, C) = (K\Gamma) - \rho$
 $\max d(\Gamma, C) = (K\Gamma) + \rho$

Παράδειγμα

Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 36$ και τα σημεία
 $A(-2, 4)$, $B(10, 7)$

1. Να βρεθεί η σχετική θέση του κύκλου ως προς τα σημεία.
2. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση του κάθε σημείου ως προς τον κύκλο C.

Λύση

- Κέντρο: ακτίνα:

- $(KA) =$

- $(KB) =$

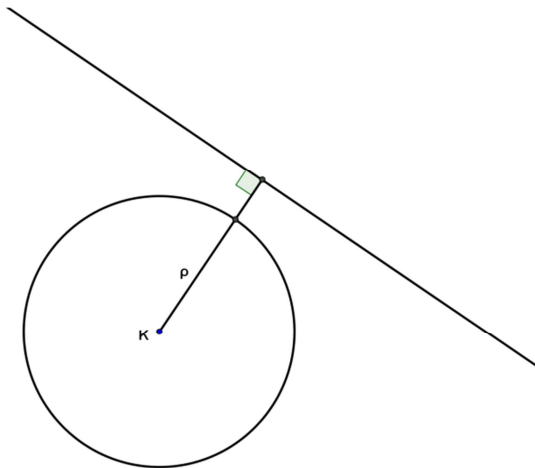
- $\min d(A, C) =$

- $\max d(A, C) =$

- $\min d(B, C) =$

- $\max d(B, C) =$

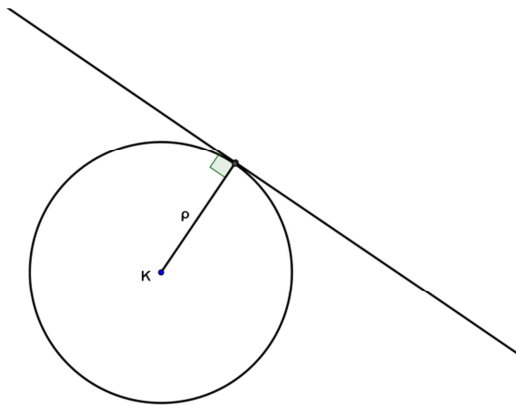
• Σχετική θέση ευθείας και κύκλου



Αν είναι $d(K, \varepsilon) > \rho$ τότε ευθεία και κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Ισχύει τότε ότι:

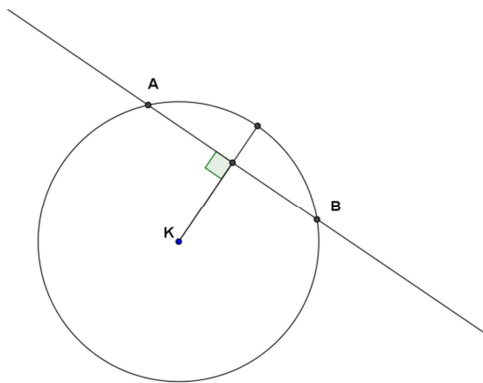
$$\min d(C, \varepsilon) = d(K, \varepsilon) - \rho$$



Αν είναι $d(K, \varepsilon) = \rho$ τότε ευθεία και κύκλος εφάπτονται σε ένα σημείο.

Για την εύρεση του σημείου αυτού αρκεί να λυθεί το σύστημα των εξισώσεων του κύκλου και της ευθείας.

Αλλιώς βρίσκω το σημείο τομής της εφαπτομένης με την κάθετη ευθεία από το κέντρο προς την (ε)



Αν είναι $d(K, \varepsilon) < \rho$ τότε η ευθεία και κύκλος τέμνονται δε δύο σημεία.

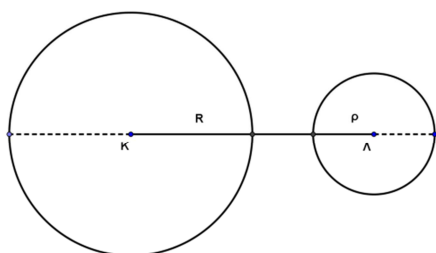
Για την εύρεση των σημείων αυτών αρκεί να λυθεί το σύστημα των εξισώσεων του κύκλου και της ευθείας.

Είναι γνωστό από την ευκλείδεια γεωμετρία ότι η κάθετη από το κέντρο

προς τη χορδή AB διέρχεται από το μέσον της χορδής καθώς επίσης κι από το μέσον του τόξου $\widehat{AB}$.

• Σχετική θέση δύο κύκλων

1. Ο ένας κύκλος εκτός του άλλου.

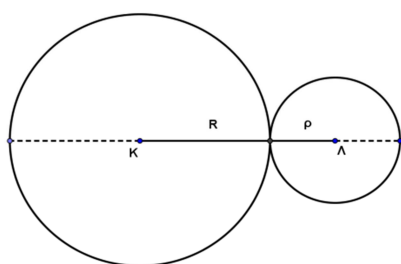


Συνθήκη:

$$\max d(C_1, C_2) =$$

$$\min d(C_1, C_2) =$$

2. Κύκλοι εφαπτόμενοι εξωτερικά

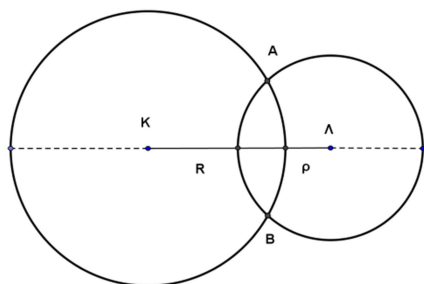


Συνθήκη:

$$\max d(C_1, C_2) =$$

$$\min d(C_1, C_2) =$$

3. Κύκλοι τεμνόμενοι



Συνθήκη:

$$\max d(C_1, C_2) =$$

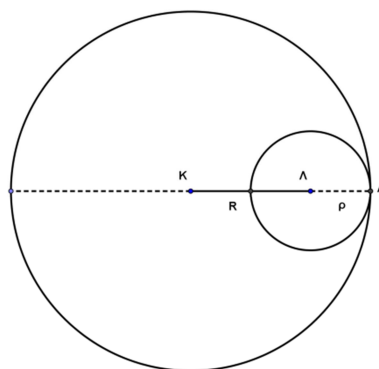
$$\min d(C_1, C_2) =$$

4. Κύκλοι εφαπτόμενοι
εσωτερικά

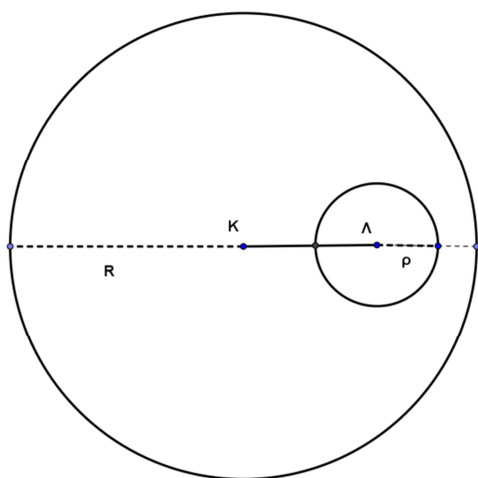
Συνθήκη:

$$\max d(C_1, C_2) =$$

$$\min d(C_1, C_2) =$$



5. Ο ένας κύκλος εντός του άλλου



Συνθήκη:

$$\max d(C_1, C_2) =$$

$$\min d(C_1, C_2) =$$

Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ (1)

- Κάθε κύκλος έχει εξίσωση που μπορεί να πάρει τη μορφή (1)

Απόδειξη

- Κάθε εξίσωση της μορφής (1) με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο .

Απόδειξη

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ Ναδειχθεί ότι οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν κύκλο και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα τους.

1. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ (1) , $A = \dots\dots\dots$, $B = \dots\dots\dots$, $\Gamma = \dots\dots\dots$

- $A^2 + B^2 - 4\Gamma =$

- $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

- $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} =$

- Η εξίσωση (1) μπορεί να πάρει και τη μορφή:

2. $x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$ (1) , $A = \dots\dots\dots$, $B = \dots\dots\dots$, $\Gamma = \dots\dots\dots$

- $A^2 + B^2 - 4\Gamma =$

- $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

- $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} =$

- Η εξίσωση (1) μπορεί να πάρει και τη μορφή:

3. $x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$ (1) , $A = \dots\dots\dots$, $B = \dots\dots\dots$, $\Gamma = \dots\dots\dots$

- $A^2 + B^2 - 4\Gamma =$

- $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

- $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} =$

- Η εξίσωση (1) μπορεί να πάρει και τη μορφή:

4. $x^2 + y^2 - 2\alpha x + 2\beta y - 1 = 0$ (1) , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $A = \dots\dots\dots$, $B = \dots\dots\dots$, $\Gamma = \dots\dots\dots$

- $A^2 + B^2 - 4\Gamma =$

- $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

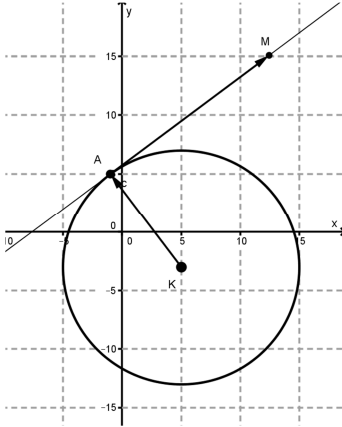
- $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma} =$

- Η εξίσωση (1) μπορεί να πάρει και τη μορφή:

Εφαπτομένη κύκλου σε γνωστό σημείο της περιφέρειας του.

Παράδειγμα Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου

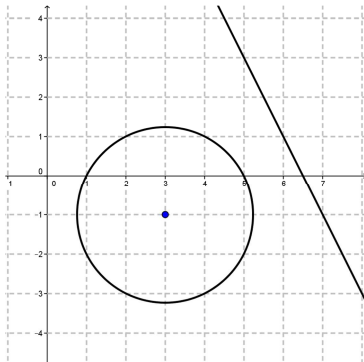
$$C: (x-5)^2 + (y+3)^2 = 100 \text{ στο σημείο του } A(-1,5)$$



Εφαπτομένη κύκλου με γνωστό συντελεστή διεύθυνσης.

Παράδειγμα Να βρεθεί τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου

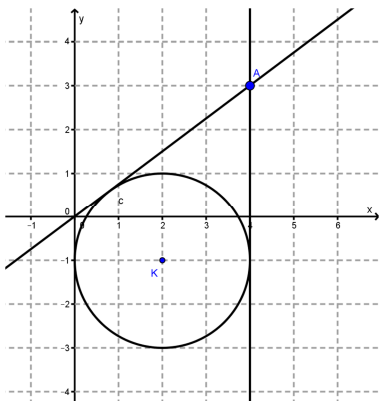
$$C: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 5 \text{ που είναι παράλληλες στην ευθεία } (\delta): 2x + y + 2014 = 0$$



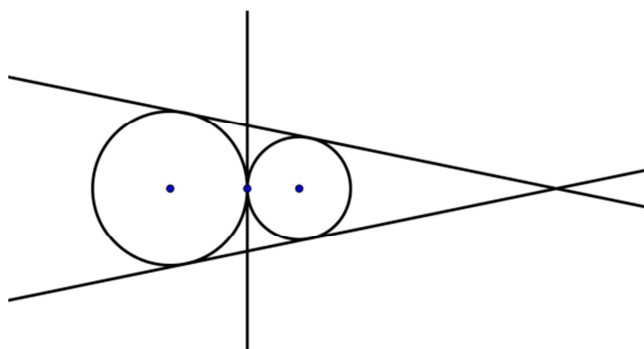
Εφαπτομένη κύκλου που διέρχεται από γνωστό σημείο εκτός του κύκλου

Παράδειγμα Να βρεθεί τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου

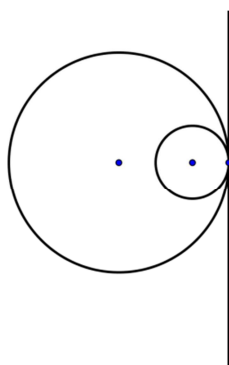
$$C: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 \text{ που διέρχονται από το σημείο } P(4,3).$$



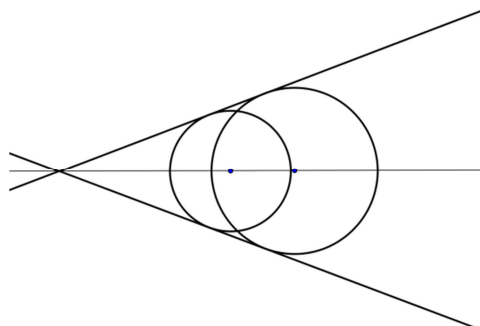
• **ΚΟΙΝΕΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ**



Η κοινή εσωτερική εφαπτομένη δυο κύκλων βρίσκεται με αφαίρεση των εξισώσεων τους κατά μέλη και είναι κάθετη στην ευθεία της διακέντρου.

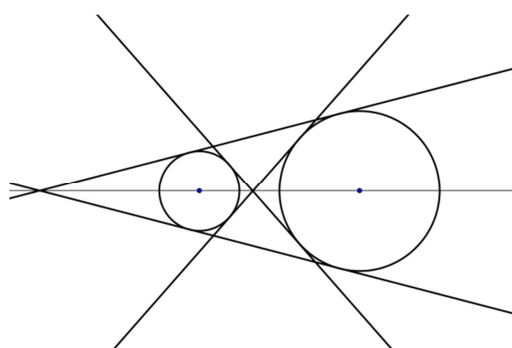


Η κοινή εξωτερική εφαπτομένη δυο κύκλων βρίσκεται με αφαίρεση των εξισώσεων τους κατά μέλη και είναι κάθετη στην ευθεία της διακέντρου



Βασικές συνθήκες ώστε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ να εφάπτεται συγχρόνως στους κύκλους

$$C_1 \text{ και } C_2 \text{ είναι: } \begin{aligned} d(K_1, \varepsilon) &= \rho_1 \\ d(K_2, \varepsilon) &= \rho_2 \end{aligned}$$



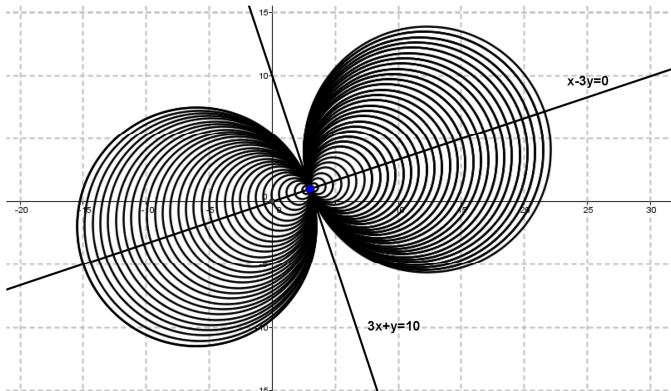
Η διακεντρική ευθεία είναι διχοτόμος της γωνίας των κοινών εφαπτομένων.

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΚΥΚΛΩΝ

• **ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΚΥΚΛΩΝ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΕΝΑ ΣΤΑΘΕΡΟ ΣΗΜΕΙΟ**

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 10 + k(3x + y - 10) = 0$ (1) $k \in \mathbb{R}$

- i) Ναδειχθεί ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $k \in \mathbb{R}$.
- ii) Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου (1).
- iii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων της οικογένειας (1).



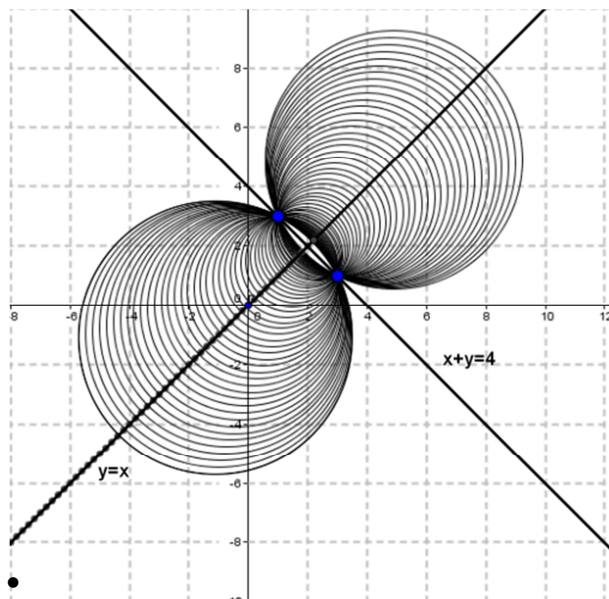
iv) Ναδειχθεί ότι όλοι οι κύκλοι της οικογένειας (1) διέρχονται από ένα σταθερό σημείο το οποίο και να βρεθεί.

v) Να βρεθεί ο κύκλος της οικογένειας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

• **ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΚΥΚΛΩΝ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΔΥΟ ΣΤΑΘΕΡΑ ΣΗΜΕΙΑ**

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 10 + k(x + y - 4) = 0$ (1) $k \in \mathbb{R}$

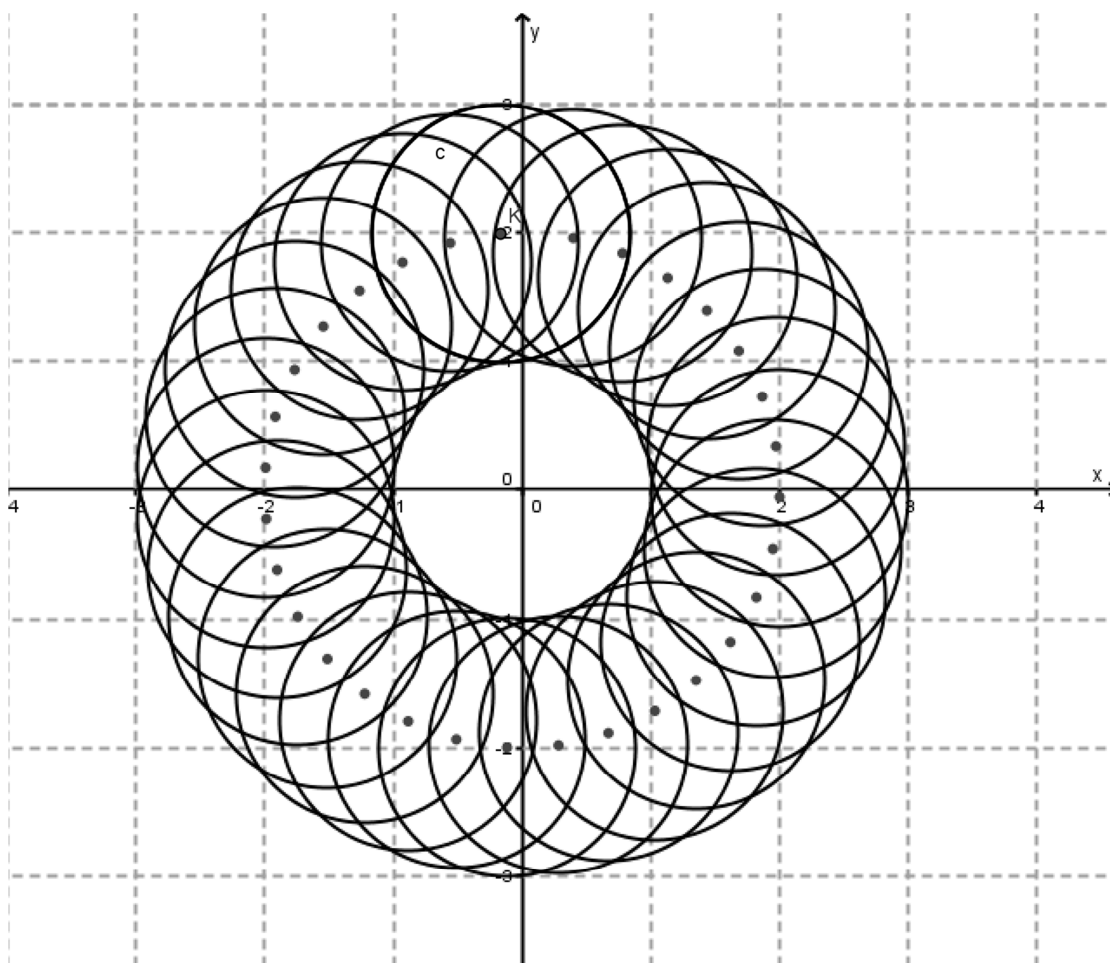
- i) Ναδειχθεί ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $k \in \mathbb{R}$.
- ii) Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου (1).
- iii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων της οικογένειας



vi) Ναδειχθεί ότι όλοι οι κύκλοι της οικογένειας (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία τα οποία και να βρεθούν.

vii) Να βρεθεί ο κύκλος της οικογένειας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

• ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΚΥΚΛΩΝ ΠΟΥ ΤΑ ΚΕΝΤΡΑ ΤΟΥΣ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΕ ΚΥΚΛΟ



Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (4\eta\mu\theta)x + (4\sigma\upsilon\nu\theta)y + 3 = 0$ (1) $\theta \in [0, 2\pi)$

- Ναδειχθεί ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\theta \in [0, 2\pi)$
- Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου (1).
- Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων της οικογένειας (1).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (k-5)x + ky + 5k - 10 = 0$ (1) $k \in \mathbb{R}$
 - i) Ναδειχθεί ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $k \in \mathbb{R}$.
 - ii) Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου (1).
 - iii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων της οικογένειας (1).
 - iv) Ναδειχθεί ότι όλοι οι κύκλοι της οικογένειας (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία τα οποία και να βρεθούν.
 - v) Να βρεθεί ο κύκλος της οικογένειας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 - vi) Να βρεθεί ο κύκλος της οικογένειας που έχει ακτίνα ίση με 5.
 - vii) Να βρεθεί ο κύκλος της οικογένειας που έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $y = 3x$
2. Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 2014 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 2014$ και κινείται πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση:
 $(x-1)^2 + y^2 = 2n(x+y-1)$ (1)
 - i) Ναδειχθεί ότι η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.
 - ii) Ναδειχθεί ότι όλες οι τροχιές διέρχονται από ένα σταθερό σημείο (η φωλιά τους).
 - iii) Ναδειχθεί ότι όλες οι τροχιές εφάπτονται στην ευθεία $x+y-1=0$.
3. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x(\sin\theta) - 2y(\eta\mu\theta) - 1 = 0$ (1) $\theta \in [0, 2\pi)$
 - iv) Ναδειχθεί ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\theta \in [0, 2\pi)$
 - v) Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου (1).
 - vi) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων της οικογένειας (1).
 - vii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου της οικογένειας για $\theta = \frac{\pi}{2}$ στο σημείο $M(1,2)$
4. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 8$ και το σημείο $P(4, -4)$.
 - i) Αν Α και Β τα σημεία επαφής των εφαπτομένων που άγονται από το Ρ προς τον κύκλο να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ΑΒ.
 - ii) Να βρεθεί το μήκος της χορδής ΑΒ.
5. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στις ευθείες
 $(\varepsilon_1): 2x - y - 5 = 0$
 $(\varepsilon_2): 2x - y + 3 = 0$
και το κέντρο του βρίσκεται πάνω στην $y=x$

6. Δίνονται οι κύκλοι με εξισώσεις:

$$C_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$$

$$C_2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$$

Να βρεθεί η σχετική θέση των δύο κύκλων.

Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εξωτερικής εφαπτομένης τους.

7. Δίνονται οι κύκλοι με εξισώσεις:

$$C_1 : x^2 + y^2 - 10x - 2y + 6 = 0$$

$$C_2 : x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$$

Να βρεθεί η σχετική θέση των δύο κύκλων.

Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης τους.

8. Δίνονται οι κύκλοι με εξισώσεις:

$$C_1 : x^2 + y^2 = 8$$

$$C_2 : (x-2)^2 + y^2 = 2$$

Να βρεθεί η σχετική θέση των δύο κύκλων.

Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων τους.

9. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων

$$M(4\eta\mu\theta - 3, 5 - 4\sigma\upsilon\nu\theta) \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Να βρεθεί η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων A και B που ανήκουν στον τόπο του σημείου M.

10. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M ώστε $\hat{A}MB = 90^\circ$ όπου $A(7,2)$ και $B(1,10)$.

11. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2 + y^2 = 10$ που διέρχονται από το σημείο $A(2,2)$

12. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 49$ και τα σημεία $A(2,3)$, $B(7,5)$

Να βρεθεί η σχετική θέση του κύκλου ως προς τα σημεία.

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση του κάθε σημείου ως προς τον κύκλο C.

13. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 20$

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών του κύκλου που το ένα άκρο τους είναι το σημείο $A(-3,2)$

14. Δίνονται οι κύκλοι με εξισώσεις:

$$C_1 : x^2 + y^2 = 4$$

$$C_2 : (x-5)^2 + (y-12)^2 = 9$$

Να βρεθεί η σχετική θέση των δύο κύκλων.

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων των δύο κύκλων.

15. Δίνονται οι κύκλοι με εξισώσεις:

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1$$

$$C_2 : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 81$$

Να βρεθεί η σχετική θέση των δύο κύκλων.

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων των δύο κύκλων.

16. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $(x-6)^2 + (y+8)^2 = 9$ (1)

Αν A και B δύο σημεία του κύκλου (1) για τα οποία ισχύει $(AB)=6$ να βρεθεί η τιμή του μέτρου $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|$

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του μέτρου $|\overrightarrow{OM}|$, όπου $M \in C$