

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

- Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \kappa \vec{i} + \lambda \vec{j}$, $\vec{\beta} = (\kappa - \lambda) \vec{i} + (\kappa + \lambda) \vec{j}$, $\vec{\gamma} = (\kappa + 25) \vec{i} + 5 \vec{j}$ και $\vec{\delta} = (2\kappa + \lambda - 5) \vec{i} + (\kappa - 1) \vec{j}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
α) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι παράλληλα, να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma} \uparrow \downarrow \vec{\delta}$.
β) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν.
- Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $x\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα.
- Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$ και $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp \vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$.
- Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 5$, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{7}$ και $2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha}$. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.
- Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$ και $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = 2\sqrt{3}$.
- Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{6}$, να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = 2$.
- Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι: $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}| = \sqrt{19}$.
- Εστω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}| = |3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}|$. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.
- Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ για το οποίο ισχύει $\vec{\gamma} \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$.
- Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι: $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{6}$ και $(4\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \perp (3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta})$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

11. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι: $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$, και $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.
12. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ με $\vec{\alpha} = \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}}{|\vec{\delta}|^2} \cdot \vec{\delta}$, $\vec{\delta} \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι:
- α) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ β) Αν $\vec{\gamma} \parallel \vec{\delta}$, τότε $\vec{\beta} = \vec{0}$
13. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι: $\frac{|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2}{|\vec{\beta}|^2} - 2 \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} - \left(\frac{1}{|\vec{\beta}|} \vec{\beta} \right) = 1$.
- Να αποδείξετε ότι $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.
14. Εστω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$, $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3$. Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
15. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = \frac{|\vec{\alpha}|}{\sqrt{3}-1}$ και $(\sqrt{3}+1)\vec{\alpha} = \sqrt{3}\vec{\beta} + \vec{\gamma}$, $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$.
16. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. Να βρείτε διανύσματα $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ για τα οποία ισχύει ότι: $\vec{\gamma} \parallel (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$, $\vec{\delta} \perp (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})$ και $\vec{\gamma} + \vec{\delta} = \vec{\alpha}$.
17. Εστω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \perp (7\vec{\alpha} + 5\vec{\beta})$ και $(\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}) \perp (7\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$. Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
18. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$, $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Έστω ΔΕ $\perp$ ΑΒ.
- α) Να υπολογίσετε συνάρτησε των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DE}$.
- β) Να υπολογίσετε τη γωνία Α.
19. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$, $|\overrightarrow{AG}| = 2\sqrt{3}$ και $A = 60^\circ$. Να υπολογίσετε την γωνία ΒΑΜ.
20. Δίνονται τα μοναδιαία και μη παράλληλα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ για τα οποία ισχύει ότι $\vec{\gamma} + 4\vec{\delta} = 6\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $2\vec{\gamma} + \vec{\delta} = 5\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $(\vec{\gamma}, \vec{\delta}) = \frac{\pi}{3}$.
- α) Να γράψετε τα διανύσματα $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

β) Να αποδείξετε ότι $(\hat{\vec{\alpha}}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

21. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\hat{\vec{\alpha}}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Έστω τρίγωνο ABΓ με $\vec{AB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{BG} = 2\vec{\alpha} - 6\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου.

22. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AG} = \vec{\beta}$. Έστω σημείο Δ για το οποίο ισχύει $\vec{BD} = 2\vec{AG}$ και το μέσο M της AG. Να αποδείξετε ότι:

α) $\vec{AD} = \frac{1}{3}(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$ **β)** $\vec{AD} \perp \vec{BM}$

23. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με $|\vec{AB}| = 3$, $|\vec{AD}| = 4$ και $|\vec{AG}| = \sqrt{13}$. Να υπολογίσετε το $|\vec{BD}|$.

24. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει ότι $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{2} = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{5}$.
Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$.

25. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει ότι $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = -\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

26. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Αν για κάθε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ του επιπέδου, ισχύει ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

27. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$. Να αποδείξετε ότι:
 $-3 \leq \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \leq 3$.

28. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\beta}| = 2$ και $|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 4}$.
Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = 2\vec{\beta}$.

29. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| < |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$, να αποδείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αμβλεία.

30. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| = 2$, $(\hat{\vec{\alpha}}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και $|5\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| = 6$.

β) Να υπολογίσετε το $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|$.

31. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2$, να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| \geq |\vec{\alpha}|$.

32. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

β) $|\vec{\alpha}(\vec{\gamma} - \vec{\beta})| \leq |\vec{\beta}| |\vec{\gamma} - \vec{\alpha}| + |\vec{\gamma}| |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

33. Δίνονται τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\gamma}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = 30^\circ$, $(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 60^\circ$.

34. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|} \vec{\beta}$, $\vec{\delta} = \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|} \vec{\alpha}$.

Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\gamma} + \vec{\delta}|$.

35. Αν για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}) \perp (\lambda \vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}| = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}| = 1$

β) $|4\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = 5$

36. Εστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|$ και $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})^2 = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2.$$

37. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

α) Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{x} = 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta} + |\vec{\alpha}|\vec{\alpha} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|)\vec{\beta}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{x}$.

γ) Να αποδείξετε ότι: $\vec{x} \perp \vec{\alpha}$.

38. Εστω ω η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Να αποδείξετε

$$\text{ότι } |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \eta\mu\omega = |\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})|.$$

39. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{x}$ για τα οποία ισχύει: $(\vec{\alpha} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{x}$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι $(\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} - 1)(\vec{\alpha} \cdot \vec{x}) = \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$ (2).

β) Αν $\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} \neq 1$, να υπολογίσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

40. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha}^2 > 0$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύει: $[\vec{\alpha}(\vec{x} + \vec{\beta})]\vec{x} + [\vec{x}(\vec{\alpha} + \vec{x})]\vec{\beta} = \vec{0}$.

41. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha}^2 \vec{\beta} = (\vec{\alpha} \vec{\beta}) \vec{\alpha}$, να αποδείξετε ότι

α) $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$

β) $(\vec{\alpha} \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2$

42. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι παράλληλα, αν και μόνο αν $(\vec{\beta}^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{\beta}^2 (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$.
43. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις: $\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} = |\vec{\beta}| \vec{\alpha}$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.
44. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$ και $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 = 2$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = \pm \vec{\beta}$.
45. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{x}$ ισχύει ότι $\vec{x} = |\vec{\beta}| \vec{\alpha} + |\vec{\alpha}| \vec{\beta}$ και $|\vec{x}| = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2$, να αποδείξετε ότι:
- α) $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ β) $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$
46. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$. Έστω Ο σημείο του επιπέδου τριγώνου ΑΒΓ για το οποίο ισχύει ότι: $\vec{OA} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\vec{OB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{OG} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.
- α) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΗ του τριγώνου.
β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
47. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\gamma}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.
Αν $(\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}) \perp (5\vec{\alpha} - 4\vec{\gamma})$, να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο μη μηδενικές συνιστώσες παράλληλες στα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$.
48. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, 11)$ σε δύο συνιστώσες, μία παράλληλη στο $\vec{\beta} = (-1, 3)$ και μία κάθετη στο $\vec{\beta}$.
49. Να βρείτε τη προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha} = (6, 8)$ στο διάνυσμα $\vec{\beta} = (2, 1)$.
50. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{\beta} = -2\vec{i} + 8\vec{j}$. Να αναλύσετε το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$.
51. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$, να βρείτε τη προβολή του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$.
52. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (4, 3)$ και $\vec{\beta} = (1, 2)$. Να βρείτε τη προβολή του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 5\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

53. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-4, 3)$ και $\vec{\beta} = (4, 2)$. Να βρείτε τη προβολή του διανύσματος $\vec{\gamma} = \frac{1}{2}(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\alpha} + \frac{1}{4}|\vec{\beta}|^2 \vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$.
54. Αν $\vec{\alpha} = (8, 6)$ και $\vec{\beta} = (6, 2)$, να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \frac{8}{5}\vec{\alpha}$.
55. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$.
Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ έτσι ώστε να ισχύει: $\text{προβ}_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) = 4\vec{\beta}$.
56. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{5\pi}{6}$.
Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ έτσι ώστε να ισχύει: $\text{προβ}_{\vec{\alpha}-3\vec{\beta}}(\lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \vec{0}$.
57. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$.
α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$.
β) Να υπολογίσετε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει:
 $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\kappa\vec{\alpha} + (2 - \kappa)\vec{\beta}) = 4\kappa\vec{\alpha} - 2\lambda\vec{\beta}$
58. Εστω ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι οι κάθετες συνιστώσες διανύσματος $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\gamma}| = 5\sqrt{5}$ και $\vec{\alpha} = (3, -6)$. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
59. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι: $3\vec{\beta} - \text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \vec{0}$.
και $\vec{\alpha} - 4\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \vec{0}$. Να αποδείξετε ότι:
α) $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|\sqrt{3}$ β) $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$.
60. Αν $\vec{v} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$, να αποδείξετε ότι: $|\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}| = |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|$.
61. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Να αποδείξετε ότι:
α) $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2} \cdot \vec{\alpha}$ β) $|\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}| = \frac{|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|}$
62. Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\mu\vec{\beta} + \nu\vec{\gamma}) = \mu \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} + \nu \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}$.
63. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, -3)$, $B(-3, 0)$ και $\Gamma(4, 4)$. Αν AD το ύψος του τριγώνου, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{BD}$.

64. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(3, -2)$, $B(0, 1)$ και $\Gamma(4, 5)$. Να βρείτε
- α) τη προβολή της $A\Gamma$ στη $B\Gamma$. Τι συμπέρασμα προκύπτει για το τρίγωνο $AB\Gamma$;
 - β) τη προβολή της διαμέσου AM στη $B\Gamma$.
65. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $(AB) = 2$, $(A\Gamma) = 6$ και $A = 60^\circ$.
- α) Να υπολογίσετε τη προβολή του $A\Gamma$ στην AB .
 - β) Αν M μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{\overrightarrow{B\Gamma}} \overrightarrow{AM} = \frac{4}{13} \overrightarrow{B\Gamma}$.
66. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει ότι $|\text{προβ}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{A\Gamma}| = |\text{προβ}_{\overrightarrow{A\Gamma}} \overrightarrow{AB}|$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.
67. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι: $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha}$.
Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ίσα ή κάθετα.
68. α) Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}$, $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \vec{\delta}$ και $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma} = \vec{\delta}$.
- β) Αν $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\gamma} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\delta}$ και $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\gamma} = \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\delta}$ να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma} = \vec{\delta}$.
69. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2$, $(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ και $\vec{\gamma} = x\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.
- α) Να βρείτε το x για το οποίο το $|\vec{\gamma}|$ γίνεται ελάχιστο.
Εστω $x = -\frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι:
 - β) $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$ γ) $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\gamma} = \frac{1}{2} \vec{\beta}$
70. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 60^\circ$, $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$. Έστω M το μέσο της $B\Gamma$ και σημείο Δ τέτοιο, ώστε $2\overrightarrow{A\Delta} + 3\overrightarrow{A\Gamma} = 5\overrightarrow{AB}$.
- α) Να αποδείξετε ότι το B βρίσκεται μεταξύ των Γ, Δ .
 - β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ συναρτήσει του $|\vec{\alpha}|$.
 - γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{AM}$ συναρτήσει του $|\vec{\alpha}|$.
 - δ) Να αποδείξετε ότι $\angle AM > 90^\circ$.
 - ε) Να αποδείξετε ότι $B = 90^\circ$.
 - στ) Να υπολογιστεί η προβολή του $\overrightarrow{A\Delta}$ στο $\overrightarrow{\Gamma B}$.

Λύσεις

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \kappa \vec{i} + \lambda \vec{j}$, $\vec{\beta} = (\kappa - \lambda) \vec{i} + (\kappa + \lambda) \vec{j}$, $\vec{\gamma} = (\kappa + 25) \vec{i} + 5 \vec{j}$ και $\vec{\delta} = (2\kappa + \lambda - 5) \vec{i} + (\kappa - 1) \vec{j}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι παράλληλα, να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma} \uparrow \downarrow \vec{\delta}$.

β) Αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν.

Λύση

α) $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \kappa & \lambda \\ \kappa - \lambda & \kappa + \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 + \kappa\lambda - \kappa\lambda + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\kappa^2 + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = \lambda = 0.$$

Τότε $\vec{\gamma} = 25\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{\delta} = -5\vec{i} - \vec{j}$ και $\vec{\gamma} = -5\vec{\delta} \Rightarrow \vec{\gamma} \uparrow \downarrow \vec{\delta}$.

β) $\vec{a} \not\parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \kappa \neq 0$ ή $\lambda \neq 0$.

$$\cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| |\vec{\beta}|} = \frac{\kappa(\kappa - \lambda) + \lambda(\kappa + \lambda)}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} \sqrt{(\kappa - \lambda)^2 + (\kappa + \lambda)^2}} = \frac{\kappa^2 - \cancel{\kappa\lambda} + \cancel{\kappa\lambda} + \lambda^2}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} \sqrt{\kappa^2 - 2\cancel{\kappa\lambda} + \lambda^2 + \kappa^2 + 2\cancel{\kappa\lambda} + \lambda^2}} \Leftrightarrow$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\kappa^2 + \lambda^2}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} \sqrt{2\kappa^2 + 2\lambda^2}} = \frac{\kappa^2 + \lambda^2}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} \sqrt{2} \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} = \frac{\kappa^2 + \lambda^2}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}^2 \sqrt{2}} = \frac{\cancel{\kappa^2 + \lambda^2}}{(\kappa^2 + \lambda^2) \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{άρα } (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{4}$$

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{a} - \vec{\beta}$ και $x\vec{a} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα.

Λύση

$$\text{Είναι } \vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{a}, \vec{\beta}) = 1 \cdot 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Για να είναι τα διανύσματα $\vec{a} - \vec{\beta}$ και $x\vec{a} + \vec{\beta}$ κάθετα πρέπει:

$$(\vec{a} - \vec{\beta})(x\vec{a} + \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{\beta} - x\vec{a}\vec{\beta} - \vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + 2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -2$$

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$ και $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp \vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$.

Λύση

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\beta}|^2$$

$$\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|} = \frac{-|\vec{\beta}|^2}{2|\vec{\beta}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{-|\vec{\beta}|^2}{2|\vec{\beta}|^2} = -\frac{1}{2} = -\cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 5$, $|\vec{\alpha}| = \sqrt{7}$ και $2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha}$. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } |2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}| &= |5\vec{\alpha}| \Leftrightarrow |2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}|^2 = |5\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow (2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma})^2 = (5\vec{\alpha})^2 \Leftrightarrow \\ 4\vec{\beta}^2 + 12\vec{\beta}\vec{\gamma} + 9\vec{\gamma}^2 &= 25\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow 4|\vec{\beta}|^2 + 12|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|\cos(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) + 9|\vec{\gamma}|^2 = 25|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \\ 4 \cdot 5^2 + 12 \cdot 5 \cdot 5 \cos(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) + 9 \cdot 5^2 &= 25 \cdot 7^2 \Leftrightarrow \\ 100 + 300 \cos(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) + 225 &= 1225 \Leftrightarrow 300 \cos(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = -150 \Leftrightarrow \\ \cos(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) &= -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \cos 120^\circ, \text{ άρα } (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 120^\circ \end{aligned}$$

5. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})$ και $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = 2\sqrt{3}$.

Λύση

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} &\Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \\ (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}) &\Leftrightarrow (2\vec{\alpha} + \vec{\beta})(\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{\alpha}^2 - 8\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\beta} - 4\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow \\ 2|\vec{\alpha}|^2 &= 4|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = \sqrt{2}|\vec{\beta}| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \\ |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2 &= (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 4|\vec{\beta}|^2 = 4 + 8 = 12 \Leftrightarrow |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

6. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{6}$, να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = 2$.

Λύση

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} &\Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \\ (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) &\Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta})(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$|\vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = \sqrt{2}|\vec{\alpha}|$$

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{6} \Leftrightarrow (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = 6 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 6 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 = 6 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\alpha}|^2 = 6 \Leftrightarrow$$

$$3|\vec{\alpha}|^2 = 6 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 = 2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = \sqrt{2}.$$

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{2}|\vec{\alpha}| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

7. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι: $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}| = \sqrt{19}$.

Λύση

$$(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \Leftrightarrow (\vec{\alpha} - \vec{\beta})(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$$

$$|2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}| = \sqrt{19} \Leftrightarrow (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})^2 = 19 \Leftrightarrow 4\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 = 19 \Leftrightarrow$$

$$4|\vec{\alpha}|^2 + 12|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cos \frac{\pi}{3} + 9|\vec{\beta}|^2 = 19 \Leftrightarrow 4|\vec{\alpha}|^2 + 6|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\alpha}| + 9|\vec{\alpha}|^2 = 19 \Leftrightarrow$$

$$19|\vec{\alpha}|^2 = 19 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 = 1 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = 1$$

8. Εστω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}| = |3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}|$. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

Λύση

$$|3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}| = |3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}| \Leftrightarrow |3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}|^2 = |3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow (3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta})^2 = (3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow$$

$$9\vec{\alpha}^2 + 24\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 16\vec{\beta}^2 = 9\vec{\alpha}^2 - 24\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 16\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 48\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$$

9. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ για το οποίο ισχύει $\vec{\gamma} \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$.

Λύση

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$\text{Είναι } \vec{\gamma} \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\gamma} = \lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \text{ και } \vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha} \cdot (\lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \lambda\vec{\alpha}^2 + \lambda\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow 2 - 4\lambda + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

$$\text{Τότε } \vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}.$$

10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι: $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{6}$ και $(4\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \perp (3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta})$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

Λύση

$$\begin{aligned} (4\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \perp (3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}) &\Leftrightarrow (4\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \\ 12\vec{\alpha}^2 + 16\vec{\alpha}\vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 - 8\vec{\beta}^2 &= 0 \Leftrightarrow 12|\vec{\alpha}|^2 + 10\vec{\alpha}\vec{\beta} - 8|\vec{\beta}|^2 = 0 \Leftrightarrow 48 + 10\vec{\alpha}\vec{\beta} - 48 = 0 \Leftrightarrow \\ \vec{\alpha}\vec{\beta} &= 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \end{aligned}$$

11. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι: $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$, και $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

Λύση

$$\begin{aligned} (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) &\Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \quad (1) \\ (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) &\Leftrightarrow (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 4\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow \\ 2|\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 4|\vec{\beta}|^2 &= 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 2|\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 4|\vec{\alpha}|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2 \\ \text{Είναι } \cos(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) &= \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} = \frac{|\vec{\alpha}|^2}{|\vec{\alpha}|^2} = 1 \Leftrightarrow (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = 0^\circ, \text{ άρα } \vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta} \text{ και επειδή } |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|, \text{ είναι} \end{aligned}$$

12. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ με $\vec{\alpha} = \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}}{|\vec{\delta}|^2} \cdot \vec{\delta}$, $\vec{\delta} \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\gamma}$. Να

αποδείξετε ότι:

α) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

β) Αν $\vec{\gamma} \parallel \vec{\delta}$, τότε $\vec{\beta} = \vec{0}$

Λύση

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\gamma}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \left(\frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}}{|\vec{\delta}|^2} \cdot \vec{\delta} \right) \cdot \left(\frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}}{|\vec{\delta}|^2} \cdot \vec{\delta} \right) - \left(\frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}}{|\vec{\delta}|^2} \cdot \vec{\delta} \right) \cdot \vec{\gamma} = \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta})^2}{|\vec{\delta}|^4} \cdot \vec{\delta}^2 - \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}}{|\vec{\delta}|^2} \cdot (\vec{\delta} \cdot \vec{\gamma}) \Leftrightarrow$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta})^2}{|\vec{\delta}|^4} \cdot |\vec{\delta}|^2 - \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta})^2}{|\vec{\delta}|^2} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$$

β) $\vec{\gamma} \parallel \vec{\delta} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = \lambda \vec{\delta}, \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε $\vec{\alpha} = \frac{\lambda \vec{\delta} \cdot \vec{\delta}}{|\vec{\delta}|^2} \cdot \vec{\delta} = \frac{\lambda \vec{\delta}^2}{|\vec{\delta}|^2} \cdot \vec{\delta} = \lambda \vec{\delta}$ και $\vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\gamma} = \lambda \vec{\delta} - \lambda \vec{\delta} = \vec{0}$

13. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι: $\frac{|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2}{|\vec{\beta}|^2} - 2 \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} - \left(\frac{1}{|\vec{\beta}|} \vec{\beta} \right) = 1$.

Να αποδείξετε ότι $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$.

Λύση

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2}{|\vec{\beta}|^2} - 2 \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} - \left(\frac{1}{|\vec{\beta}|} \vec{\beta} \right) &= 1 \Leftrightarrow \frac{(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2}{|\vec{\beta}|^2} - \frac{2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2} - \frac{\vec{\beta}^2}{|\vec{\beta}|^2} = 1 \Leftrightarrow \\ \frac{\vec{\alpha}^2 + \cancel{2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} + \vec{\beta}^2 - \cancel{2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} - \vec{\beta}^2}{|\vec{\beta}|^2} &= 1 \Leftrightarrow \frac{|\vec{\alpha}|^2}{|\vec{\beta}|^2} = 1 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \\ (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) &= \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = 0 \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \end{aligned}$$

14. Εστω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$, $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3$. Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Λύση

$$\begin{aligned} (2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) &\Leftrightarrow (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow \\ 2|\vec{\alpha}|^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2 &= 0 \Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = 3 \quad (1) \\ (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) &\Leftrightarrow (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 2\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow \\ 2|\vec{\alpha}|^2 - 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 2|\vec{\beta}|^2 &= 0 \Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}|^2 - 2|\vec{\beta}|^2 = -9 \quad (2) \\ (1) - (2) &\Rightarrow |\vec{\beta}|^2 = 12 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = 2\sqrt{3} \text{ και από την (1) έχουμε} \\ 2|\vec{\alpha}|^2 - 12 = 3 &\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 = \frac{15}{2} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{30}}{2} \end{aligned}$$

15. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = \frac{|\vec{\alpha}|}{\sqrt{3}-1}$ και

$(\sqrt{3}+1)\vec{\alpha} = \sqrt{3}\vec{\beta} + \vec{\gamma}$, $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Εστω } |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = \frac{|\vec{\alpha}|}{\sqrt{3}-1} &= \lambda, \text{ τότε } |\vec{\alpha}| = (\sqrt{3}-1)\lambda \\ \left[(\sqrt{3}+1)\vec{\alpha} \right]^2 &= (\sqrt{3}\vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 \Leftrightarrow (3+1+2\sqrt{3})\vec{\alpha}^2 = 3\vec{\beta}^2 + 2\sqrt{3}\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma}^2 \Leftrightarrow \\ (4+2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)^2 \lambda^2 &= 3\lambda^2 + 2\sqrt{3}\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \lambda^2 \Leftrightarrow (4+2\sqrt{3})(3-2\sqrt{3}+1)\lambda^2 = 4\lambda^2 + 2\sqrt{3}\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow \\ (4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})\lambda^2 &= 4\lambda^2 + 2\sqrt{3}\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow (16-12)\lambda^2 = 4\lambda^2 + 2\sqrt{3}\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow \\ 4\lambda^2 &= 4\lambda^2 + 2\sqrt{3}\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \vec{\beta} \perp \vec{\gamma} \end{aligned}$$

16. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. Να βρείτε διανύσματα $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ για τα οποία ισχύει ότι: $\vec{\gamma} \parallel (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$, $\vec{\delta} \perp (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})$ και $\vec{\gamma} + \vec{\delta} = \vec{\alpha}$.

Λύση

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} \parallel (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) &\Leftrightarrow \vec{\gamma} = \lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}, \lambda \in \mathbb{R} \\ \vec{\gamma} + \vec{\delta} = \vec{\alpha} &\Leftrightarrow \vec{\delta} = \vec{\alpha} - \vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta} = (1-\lambda)\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta} \\ \vec{\delta} \perp (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) &\Leftrightarrow \vec{\delta} \cdot (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow [(1-\lambda)\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}] \cdot (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \\ 2(1-\lambda)\vec{\alpha}^2 - 3(1-\lambda)\vec{\alpha}\vec{\beta} - 2\lambda\vec{\alpha}\vec{\beta} - 3\lambda\vec{\beta}^2 &= 0 \Leftrightarrow 2(1-\lambda)|\vec{\alpha}|^2 - 3\lambda|\vec{\beta}|^2 = 0 \Leftrightarrow \\ 2 - 2\lambda - 3\lambda &= 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{5}. \text{ Τότε } \vec{\gamma} = \frac{2}{5}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \text{ και } \vec{\delta} = \left(1 - \frac{2}{5}\right)\vec{\alpha} - \frac{2}{5}\vec{\beta} = \frac{3}{5}\vec{\alpha} - \frac{2}{5}\vec{\beta} \end{aligned}$$

17. Εστω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \perp (7\vec{\alpha} + 5\vec{\beta})$ και $(\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}) \perp (7\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$. Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Λύση

$$\begin{aligned} (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \perp (7\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}) &\Leftrightarrow (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \cdot (7\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow 7\vec{\alpha}^2 + 5\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 21\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 15\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow \\ 7\vec{\alpha}^2 - 16\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 15\vec{\beta}^2 &= 0 \Leftrightarrow \frac{7\vec{\alpha}^2 - 15\vec{\beta}^2}{16} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \quad (1) \\ (\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}) \perp (7\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) &\Leftrightarrow (\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}) \cdot (7\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow 7\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 28\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 8\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow \\ 7\vec{\alpha}^2 + 30\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 8\vec{\beta}^2 &= 0 \Leftrightarrow \frac{-7\vec{\alpha}^2 - 8\vec{\beta}^2}{30} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \quad (2) \\ \text{Από τις (1), (2), είναι: } \frac{7\vec{\alpha}^2 - 15\vec{\beta}^2}{16} &= \frac{-7\vec{\alpha}^2 - 8\vec{\beta}^2}{30} \Leftrightarrow 105|\vec{\alpha}|^2 - 225|\vec{\beta}|^2 = -56|\vec{\alpha}|^2 - 64|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow \\ 161|\vec{\alpha}|^2 &= 161|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|. \\ (1) \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= \frac{7|\vec{\alpha}|^2 - 15|\vec{\alpha}|^2}{16} = -\frac{|\vec{\alpha}|^2}{2}. \\ \text{Είναι } \cos(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) &= \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} = \frac{-\frac{|\vec{\alpha}|^2}{2}}{|\vec{\alpha}||\vec{\alpha}|} = -\frac{1}{2}, \text{ άρα } (\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

18. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\vec{AB} = \vec{\alpha}$, $\vec{AD} = \vec{\beta}$, $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και

$$(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}. \text{ Εστω } \Delta E \perp AB.$$

α) Να υπολογίσετε συναρτήσεις των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τα διανύσματα $\vec{AE}, \vec{DE}$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία Α.

Λύση

$$\alpha) \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \frac{\pi}{3} = 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

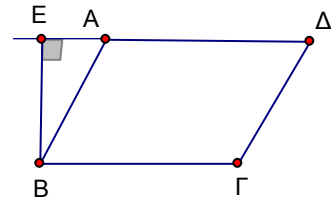
$$\text{Είναι } \vec{AE} \parallel \vec{AD} \Leftrightarrow \vec{AE} = \lambda \vec{AD}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AD} \cdot \text{προβ}_{\vec{AD}} \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{AD} \cdot \vec{AD} \Leftrightarrow$$

$$-1 = \lambda \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} = \lambda$$

$$\text{Άρα } \vec{AE} = -\frac{1}{4} \vec{AD}. \quad \vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AE} = -\vec{\beta} - \frac{1}{4} \vec{\beta} = -\frac{5}{4} \vec{\beta}$$

$$\beta) \cos A = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AD}| |\vec{AB}|} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 120^\circ$$



19. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $|\vec{AB}| = \sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$, $|\vec{AG}| = 2\sqrt{3}$ και $A = 60^\circ$. Να υπολογίσετε την γωνία BAM.

Λύση

$$\vec{AB} \cdot \vec{AG} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AG}| \cos A = \sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 3(\sqrt{3}-1)$$

$$\text{Είναι } \vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AG}) \text{ και}$$

$$|\vec{AM}|^2 = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AG})^2 = \frac{1}{4}(\vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AG} + \vec{AG}^2) \Leftrightarrow$$

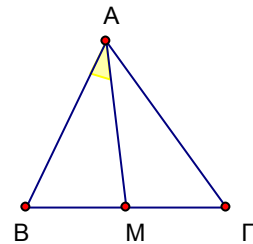
$$|\vec{AM}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{AB}|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AG} + |\vec{AG}|^2) = \frac{1}{4}(3(\sqrt{3}-1)^2 + 6(\sqrt{3}-1) + 12) \Leftrightarrow$$

$$|\vec{AM}|^2 = \frac{1}{4}(3(3-2\sqrt{3}+1) + 6\sqrt{3}-6+12) = \frac{1}{4}(12-6\sqrt{3}+6\sqrt{3}+6) = \frac{18}{4} \Leftrightarrow |\vec{AM}| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \angle BAM = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AM}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AM}|} = \frac{\vec{AB} \cdot \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AG})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{\vec{AB}^2 + \vec{AB} \cdot \vec{AG}}{3\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\cos \angle BAM = \frac{3(\sqrt{3}-1)^2 + 3(\sqrt{3}-1)}{3\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}} = \frac{\cancel{3}(3-2\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1)}{\cancel{3}\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{(3-\sqrt{3})\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\angle BAM = 45^\circ$$



20. Δίνονται τα μοναδιαία και μη παράλληλα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ για τα οποία ισχύει ότι $\vec{\gamma} + 4\vec{\delta} = 6\vec{a} + 3\vec{\beta}$, $2\vec{\gamma} + \vec{\delta} = 5\vec{a} - \vec{\beta}$ και $(\vec{\gamma}, \vec{\delta}) = \frac{\pi}{3}$.

α) Να γράψετε τα διανύσματα $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}, \vec{\beta}$.

β) Να αποδείξετε ότι $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

Λύση

α) $\vec{\gamma} + 4\vec{\delta} = 6\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\gamma} = 6\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 4\vec{\delta} \quad (1)$

$$2\vec{\gamma} + \vec{\delta} = 5\vec{\alpha} - \vec{\beta} \xrightarrow{(1)} 2(6\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 4\vec{\delta}) + \vec{\delta} = 5\vec{\alpha} - \vec{\beta} \Leftrightarrow 12\vec{\alpha} + 6\vec{\beta} - 8\vec{\delta} + \vec{\delta} = 5\vec{\alpha} - \vec{\beta} \Leftrightarrow$$

$$-7\vec{\delta} = -7\vec{\alpha} - 7\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

$$(1) \Rightarrow \vec{\gamma} = 6\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 4(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$$

β) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \cos(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$. Επειδή $-1 \leq \cos(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \leq 1$, είναι $-1 \leq \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \leq 1$

$$|\vec{\gamma}|^2 = (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 5 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\gamma}| = \sqrt{5 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}$$

$$|\vec{\delta}|^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\delta}| = \sqrt{2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}$$

$$\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta} = (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta}^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - |\vec{\beta}|^2 = 1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow$$

$$|\vec{\gamma}| \cdot |\vec{\delta}| \cos \frac{\pi}{3} = 3 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{5 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} \sqrt{2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} = 1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \quad (2)$$

Επειδή τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, είναι $\cos(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \neq \pm 1$, άρα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \neq \pm 1$, οπότε

υψώνοντας κατά μέλη στη (2), έχουμε:

$$\frac{1}{4} (5 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 (2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = (1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \Leftrightarrow 5 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2(1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \Leftrightarrow 5 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow$$

$$6\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{\pi}{3}$$

21. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

Εστω τρίγωνο ABΓ με $\vec{AB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{BG} = 2\vec{\alpha} - 6\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου.

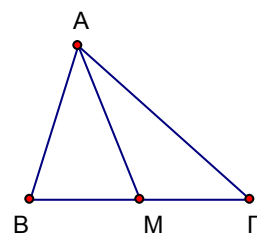
Λύση

$$\text{Είναι } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + \frac{1}{2} \vec{BG} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + \frac{1}{2} (2\vec{\alpha} - 6\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$$

$$|\vec{AM}|^2 = (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 - 4 + |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{AM}|^2 = 16 - 4 + 1 = 13 \Leftrightarrow |\vec{AM}| = \sqrt{13}$$



22. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AG} = \vec{\beta}$. Έστω σημείο Δ για το οποίο ισχύει $\vec{BD} = 2\vec{AG}$ και το μέσο M της AG. Να αποδείξετε ότι:

α) $\vec{AD} = \frac{1}{3}(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$

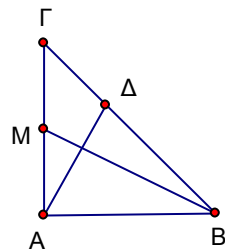
β) $\vec{AD} \perp \vec{BM}$

Λύση

α) Είναι $\vec{B\Delta} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{B\Gamma} \Leftrightarrow 2\vec{\Delta\Gamma} + \vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Gamma} - \vec{AB} \Leftrightarrow 3\vec{\Delta\Gamma} = \vec{\beta} - \vec{\alpha} \Leftrightarrow$

$$\vec{\Delta\Gamma} = \frac{1}{3}(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$$

$$\vec{A\Delta} = \vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{\beta} - \frac{1}{3}(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) = \frac{3\vec{\beta} - \vec{\beta} + \vec{\alpha}}{3} = \frac{2\vec{\beta} + \vec{\alpha}}{3} = \frac{1}{3}(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$$



β) Είναι $\vec{BM} = \vec{BA} + \vec{AM} = -\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta} = \frac{\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}}{2}$ και

$$\vec{A\Delta} \cdot \vec{BM} = \frac{\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}}{3} \cdot \frac{\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}}{2} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 2\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{6} = \frac{-2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2}{6} = 0 \Leftrightarrow \vec{A\Delta} \perp \vec{BM}$$

23. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με $|\vec{AB}| = 3$, $|\vec{AD}| = 4$ και $|\vec{AG}| = \sqrt{13}$. Να υπολογίσετε το $|\vec{BD}|$.

Λύση

$$|\vec{AG}| = \sqrt{13} \Leftrightarrow (\vec{AB} + \vec{AD})^2 = 13 \Leftrightarrow \vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AD}^2 = 13 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{AB}|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + |\vec{AD}|^2 = 13 \Leftrightarrow 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 13 - 9 - 16 = -12 \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AD} = -6$$

$$|\vec{BD}|^2 = (\vec{AD} - \vec{AB})^2 = \vec{AD}^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AB}^2 = |\vec{AD}|^2 - 2(-6) + |\vec{AB}|^2 = 16 + 12 + 9 = 37 \Leftrightarrow |\vec{BD}| = \sqrt{37}$$

24. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει ότι $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{2} = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{5}$.

Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$.

Λύση

α' τρόπος (χωρίς εσωτερικό γινόμενο)

Εστω $\frac{|\vec{\alpha}|}{2} = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{5} = \lambda > 0$, τότε $|\vec{\alpha}| = 2\lambda$, $|\vec{\beta}| = 3\lambda$, $|\vec{\gamma}| = 5\lambda$

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \vec{\beta} = -\vec{\gamma} \text{ και } |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |-\vec{\gamma}| = |\vec{\gamma}| = 5\lambda.$$

$$\text{όμως } |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 5\lambda, \text{ άρα } |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$$

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\beta} + \vec{\gamma} = -\vec{\alpha}, \text{ άρα } |\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = |-\vec{\alpha}| = |\vec{\alpha}| = 2\lambda.$$

$$\text{Όμως } \left| |\vec{\beta}| - |\vec{\gamma}| \right| = |3\lambda - 5\lambda| = 2\lambda, \text{ άρα } |\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = \left| |\vec{\beta}| - |\vec{\gamma}| \right| \Leftrightarrow \vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$$

β' τρόπος (με εσωτερικό γινόμενο)

Εστω $\frac{|\vec{\alpha}|}{2} = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{5} = \lambda > 0$, τότε $|\vec{\alpha}| = 2\lambda$, $|\vec{\beta}| = 3\lambda$, $|\vec{\gamma}| = 5\lambda$

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \vec{\beta} = -\vec{\gamma} \Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |-\vec{\gamma}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\vec{\gamma}|^2 \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = 25\lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 25\lambda^2 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 9\lambda^2 = 25\lambda^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 6\lambda^2$$

$$\cos(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{6\lambda^2}{2\lambda \cdot 3\lambda} = 1 \Leftrightarrow (\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}.$$

Ομοια $\vec{\beta} \uparrow \vec{\gamma}$

- 25.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει ότι $2\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|$. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = -\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

Λύση

$$2\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma} \Rightarrow |2\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| \Leftrightarrow |2\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = |\vec{\gamma}|^2 \Leftrightarrow (2\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = |\vec{\gamma}|^2 \Leftrightarrow$$

$$4\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\gamma}|^2 \Leftrightarrow 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -4|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\gamma}|^2 - |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$$

$$4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -4|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\alpha}|^2 = -4|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|^2$$

$$\cos(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{-|\vec{\alpha}|^2}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\alpha}|} = -1 \Leftrightarrow (\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}.$$

Επειδή $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, είναι $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$

$$2\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\beta} - \vec{\gamma} = -2\vec{\alpha} \Rightarrow |\vec{\beta} - \vec{\gamma}| = |-2\vec{\alpha}| \Leftrightarrow |\vec{\beta} - \vec{\gamma}|^2 = |-2\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow (\vec{\beta} - \vec{\gamma})^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\beta}^2 - 2\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma}^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\beta}|^2 + |\vec{\gamma}|^2 - 4|\vec{\alpha}|^2 = 2\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow 2\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\alpha}|^2 - 4|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow$$

$$2\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = -2|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = -|\vec{\alpha}|^2$$

$$\cos(\hat{\vec{\beta}}, \hat{\vec{\gamma}}) = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\gamma}|} = \frac{-|\vec{\alpha}|^2}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\alpha}|} = -1 \Leftrightarrow (\hat{\vec{\beta}}, \hat{\vec{\gamma}}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$$

Επειδή $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$ και $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|$, είναι $\vec{\beta} = -\vec{\gamma}$

- 26.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Αν για κάθε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ του επιπέδου, ισχύει ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

Λύση

$$\text{Εστω } \vec{\gamma} = (x, y), \text{ τότε: } \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow x_1x + y_1y = x_2x + y_2y \Leftrightarrow x_1x + y_1y - x_2x - y_2y = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 - x_2)x + (y_1 - y_2)y = 0 \quad (1).$$

Για να ισχύει η (1) για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ πρέπει $x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ και $y_1 - y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$.

Άρα $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

- 27.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$-3 \leq \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \leq 3.$$

Λύση

$$\begin{aligned}
-3 \leq \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \leq 3 &\Leftrightarrow -3 \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cos(\hat{\alpha}, \vec{\beta}) + |\vec{\beta}| \cdot |\vec{\gamma}| \cos(\vec{\beta}, \hat{\gamma}) + |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\gamma}| \cos(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}) \leq 3 \Leftrightarrow \\
-3 \leq 1 \cdot 1 \cdot \cos(\hat{\alpha}, \vec{\beta}) + 1 \cdot 1 \cdot \cos(\vec{\beta}, \hat{\gamma}) + 1 \cdot 1 \cdot \cos(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}) &\leq 3 \Leftrightarrow \\
-3 \leq \cos(\hat{\alpha}, \vec{\beta}) + \cos(\vec{\beta}, \hat{\gamma}) + \cos(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}) &\leq 3 \text{ που ισχύει γιατί:} \\
-1 \leq \cos(\hat{\alpha}, \vec{\beta}) \leq 1 & \\
-1 \leq \cos(\vec{\beta}, \hat{\gamma}) \leq 1 &\stackrel{(+)}{\Rightarrow} -3 \leq \cos(\hat{\alpha}, \vec{\beta}) + \cos(\vec{\beta}, \hat{\gamma}) + \cos(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}) \leq 3 \\
-1 \leq \cos(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}) \leq 1 &
\end{aligned}$$

28. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\beta}| = 2$ και $|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 4}$.

Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = 2\vec{\beta}$.

Λύση

$$\begin{aligned}
|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 4} &\Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 = 4(\sqrt{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 4})^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 = 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 16 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 = 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 4|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow \\
\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 &= 0 \Leftrightarrow (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = 2\vec{\beta}
\end{aligned}$$

29. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| < |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$, να αποδείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αμβλεία.

Λύση

$$\begin{aligned}
|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| < |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| &\Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 < |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 < (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 \Leftrightarrow \\
\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 &< \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cos(\hat{\alpha}, \vec{\beta}) < 0 \Leftrightarrow \cos(\hat{\alpha}, \vec{\beta}) < 0 \\
\text{άρα } (\hat{\alpha}, \vec{\beta}) &> 90^\circ.
\end{aligned}$$

30. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| = 2$, $(\hat{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και

$$|5\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|.$$

α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| = 6$.

β) Να υπολογίσετε το $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|$.

Λύση

$$\begin{aligned}
\alpha) |5\vec{\alpha} + \vec{\beta}| &= |2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \Leftrightarrow (5\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 \Leftrightarrow 25\vec{\alpha}^2 + 10\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \\
25|\vec{\alpha}|^2 + 14\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 4|\vec{\alpha}|^2 &= 0 \Leftrightarrow 21 \cdot 4 + 14|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cos \frac{2\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow \\
84 - 14 \cdot 2 \cdot |\vec{\beta}| \cdot \frac{1}{2} &= 0 \Leftrightarrow 14|\vec{\beta}| = 84 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = 6
\end{aligned}$$

$$\beta) |3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|^2 = (3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 = 9\vec{\alpha}^2 + 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = 9|\vec{\alpha}|^2 + 12|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cos \frac{2\pi}{3} + 4|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$$

$$|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|^2 = 36 - 72 + 144 = 108 \Leftrightarrow |3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$$

31. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2$, να αποδείξετε ότι $|\vec{\beta}| \geq |\vec{\alpha}|$.

Λύση

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cos(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = |\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \cos(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}.$$

$$\text{Είναι } \cos(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) \leq 1 \Rightarrow \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|} \leq 1 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| \leq |\vec{\beta}|$$

32. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) |\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$$

$$\beta) |\vec{\alpha}(\vec{\gamma} - \vec{\beta})| \leq |\vec{\beta}| |\vec{\gamma} - \vec{\alpha}| + |\vec{\gamma}| |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$$

Λύση

$$\alpha) |\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cos(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}}) = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| |\cos(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}})| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \text{ γιατί } |\cos(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}})| \leq 1$$

$\beta)$ Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, είναι:

$$|\vec{\beta}| |\vec{\gamma} - \vec{\alpha}| \geq |\vec{\beta}(\vec{\gamma} - \vec{\alpha})| = |\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \quad (1) \text{ και } |\vec{\gamma}| |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \geq |\vec{\gamma}(\vec{\alpha} - \vec{\beta})| = |\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} - \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}| \quad (2).$$

$$\text{Από } (1) + (2) \Rightarrow |\vec{\beta}| |\vec{\gamma} - \vec{\alpha}| + |\vec{\gamma}| |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \geq |\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| + |\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} - \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}|$$

Από τις ιδιότητες των απόλυτων τιμών, ισχύει ότι: $|x| + |y| \geq |x + y|$, οπότε:

$$|\vec{\beta}| |\vec{\gamma} - \vec{\alpha}| + |\vec{\gamma}| |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \geq |\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| + |\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} - \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}| \geq |\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} - \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}| = |\vec{\alpha}(\vec{\gamma} - \vec{\beta})|$$

33. Δίνονται τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\gamma}| = 1$ και $(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\gamma}}) = 30^\circ$, $(\hat{\vec{\beta}}, \hat{\vec{\gamma}}) = 60^\circ$.

Λύση

$$\text{Είναι } \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\gamma}| \cos(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\gamma}}) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ και } \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = |\vec{\beta}| \cdot |\vec{\gamma}| \cos(\hat{\vec{\beta}}, \hat{\vec{\gamma}}) = \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Επειδή κάθε διάνυσμα του επιπέδου γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιοι, ώστε: $\vec{\gamma} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$. Τότε:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot (\kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \kappa \vec{\alpha}^2 + \lambda \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 4\kappa = \sqrt{3} \Leftrightarrow \kappa = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot (\kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \kappa \vec{\alpha} \vec{\beta}^0 + \lambda \vec{\beta}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 3\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$|\vec{\gamma}| = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \vec{\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{6} \vec{\beta} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{16} \vec{\alpha}^2 + 2 \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\sqrt{3}}{6} \vec{\alpha} \vec{\beta}^0 + \frac{3}{36} \vec{\beta}^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{16} \cdot 4 + \frac{1}{12} \cdot 3 = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \text{ ισχύει. Άρα } \vec{\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{4} \vec{\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{6} \vec{\beta}.$$

34. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|} \vec{\beta}$, $\vec{\delta} = \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|} \vec{\alpha}$.

Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\gamma} + \vec{\delta}|$.

Λύση

$$|\vec{\gamma} + \vec{\delta}|^2 = (\vec{\gamma} + \vec{\delta})^2 = \vec{\gamma}^2 + 2\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta} + \vec{\delta}^2 = \left(\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|} \vec{\alpha} \right)^2 + 2 \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|} \vec{\alpha} \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|} \vec{\beta} + \left(\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|} \vec{\beta} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{\gamma} + \vec{\delta}|^2 = \frac{|\vec{\alpha}|^2}{|\vec{\beta}|^2} \vec{\beta}^2 + 2 \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|} \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|} \vec{\alpha} \vec{\beta} + \frac{|\vec{\beta}|^2}{|\vec{\alpha}|^2} \vec{\alpha}^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{\gamma} + \vec{\delta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$$

35. Αν για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}) \perp (\lambda \vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}| = 1$, να αποδείξετε ότι:

α) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}| = 1$ **β)** $|4\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = 5$

Λύση

α) $(\vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}) \perp (\lambda \vec{\alpha} - \vec{\beta}) \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta})(\lambda \vec{\alpha} - \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha} \vec{\beta} + \lambda^2 \vec{\alpha} \vec{\beta} - \lambda \vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \vec{\beta} \lambda^2 + \lambda (\vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2) - \vec{\alpha} \vec{\beta} = 0 \quad (1)$$

Η σχέση (1) είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς λ και για να αληθεύει για κάθε

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ πρέπει: } \begin{cases} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \\ \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = 0 \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \\ |\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\beta}|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \\ |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1 \end{cases}$$

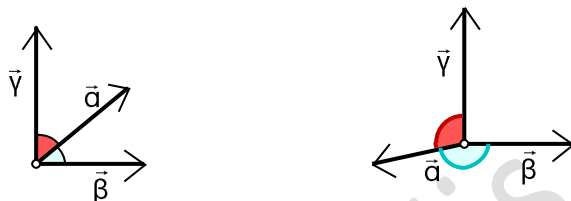
β) $|4\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|^2 = (4\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2 = 16\vec{\alpha}^2 - 24\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2 = 16|\vec{\alpha}|^2 + 9|\vec{\beta}|^2 = 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow$

$$|4\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = 5$$

36. Εστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|$ και $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι:
- $$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})^2 = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2.$$

Λύση

$$\begin{aligned} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})^2 &= \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow (|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}))^2 + (|\vec{\alpha}| |\vec{\gamma}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}))^2 = |\vec{\alpha}|^2 |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow \\ |\vec{\alpha}|^2 |\vec{\beta}|^2 \cos^2(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + |\vec{\alpha}|^2 |\vec{\gamma}|^2 \cos^2(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) &= |\vec{\alpha}|^2 |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow \\ |\vec{\beta}|^2 \cos^2(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + |\vec{\gamma}|^2 \cos^2(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) &= |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow \cos^2(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + \cos^2(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = 1 \Leftrightarrow \\ \cos^2(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) &= 1 - \cos^2(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) \Leftrightarrow \cos^2(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \sin^2(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) \quad (1) \end{aligned}$$



Είναι $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 90^\circ - (\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$ ή $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 270^\circ - (\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$, άρα

$$\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \cos[90^\circ - (\vec{\alpha}, \vec{\gamma})] = \sin(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) \text{ ή}$$

$$\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \cos[270^\circ - (\vec{\alpha}, \vec{\gamma})] = \cos[180^\circ - (90^\circ + (\vec{\alpha}, \vec{\gamma}))] = -\cos(90^\circ + (\vec{\alpha}, \vec{\gamma})) \Leftrightarrow$$

$$\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = -\cos[90^\circ - (- (\vec{\alpha}, \vec{\gamma}))] = -\sin(-(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})) = \sin(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}), \text{ οπότε σε κάθε περίπτωση}$$

η σχέση (1) ισχύει.

37. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

α) Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{x} = 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta} + |\vec{\alpha}|\vec{\alpha} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|)\vec{\beta}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{x}$.

γ) Να αποδείξετε ότι: $\vec{x} \perp \vec{\alpha}$.

Λύση

α) Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, οπότε το διάνυσμα $\vec{x}$ γίνεται:

$$\vec{x} = 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta} + |\vec{\alpha}|\vec{\alpha} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|)\vec{\beta} = 2\vec{\beta} + \vec{\alpha} - (1 + 2)\vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$$

β) $|\vec{x}|^2 = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2 \cdot 1 + |\vec{\beta}|^2 = 1 + 2 + 4 = 7 \Leftrightarrow |\vec{x}| = \sqrt{7}$

γ) $\vec{\alpha} \cdot \vec{x} = \vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{x}$

38. Έστω ω η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Να αποδείξετε ότι $|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \eta\mu\omega = |\det(\vec{a}, \vec{\beta})|$ (1).

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \det(\vec{a}, \vec{\beta}) &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 \text{ άρα η σχέση (1) γίνεται:} \\ |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \eta\mu\omega &= |x_1 y_2 - x_2 y_1| \Leftrightarrow \\ (|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \eta\mu\omega)^2 &= |x_1 y_2 - x_2 y_1|^2 \Leftrightarrow \\ |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 \cdot \eta\mu^2\omega &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \Leftrightarrow \\ |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega) &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \Leftrightarrow \\ |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \Leftrightarrow \\ (\sqrt{x_1^2 + y_1^2})^2 \cdot (\sqrt{x_2^2 + y_2^2})^2 - (\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \Leftrightarrow \\ (x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \Leftrightarrow \\ x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 - x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 &= x_1^2 y_2^2 - 2x_1 y_2 x_2 y_1 + x_2^2 y_1^2 \Leftrightarrow \\ x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 &= x_1^2 y_2^2 - 2x_1 y_2 x_2 y_1 + x_2^2 y_1^2 \text{ ισχύει.} \end{aligned}$$

39. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{x}$ για τα οποία ισχύει: $(\vec{a} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{x}$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι $(\vec{\beta} \cdot \vec{a} - 1)(\vec{a} \cdot \vec{x}) = \vec{\gamma} \cdot \vec{a}$ (2).

β) Αν $\vec{\beta} \cdot \vec{a} \neq 1$, να υπολογίσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει των $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

Λύση

α) Επειδή $(\vec{a} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{x}$, ισχύει ότι: $\vec{a} \cdot [(\vec{a} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\beta}] = \vec{a} \cdot (\vec{\gamma} + \vec{x}) \Leftrightarrow$
 $(\vec{a} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma} + \vec{a} \cdot \vec{x} \Leftrightarrow (\vec{a} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta} - \vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow (\vec{a} \cdot \vec{x})(\vec{a} \cdot \vec{\beta} - 1) = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$

β) Επειδή $\vec{\beta} \cdot \vec{a} \neq 1$, είναι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} - 1 \neq 0$, άρα η σχέση (2) γίνεται: $\vec{a} \cdot \vec{x} = \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{a}}{\vec{\beta} \cdot \vec{a} - 1}$.

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$(\vec{a} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\gamma} + \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} = (\vec{a} \cdot \vec{x}) \cdot \vec{\beta} - \vec{\gamma} = \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{a}}{\vec{\beta} \cdot \vec{a} - 1} \cdot \vec{\beta} - \vec{\gamma}$$

40. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $\vec{a} \cdot \vec{\beta} < 0$ και $\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a}^2 > 0$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύει: $[\vec{a}(\vec{x} + \vec{\beta})]\vec{x} + [\vec{x}(\vec{a} + \vec{x})]\vec{\beta} = \vec{0}$.

Λύση

Αν $\vec{x} \parallel \vec{\beta}$ τότε:

- Αν $\vec{\alpha}(\vec{x} + \vec{\beta}) \neq 0$, τότε $[\vec{\alpha}(\vec{x} + \vec{\beta})]\vec{x} + [\vec{x}(\vec{\alpha} + \vec{x})]\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = -\frac{\vec{x}(\vec{\alpha} + \vec{x})}{\vec{\alpha}(\vec{x} + \vec{\beta})}\vec{\beta} \Rightarrow \vec{x} \parallel \vec{\beta}$ άτοπο.

- Αν $\vec{x}(\vec{\alpha} + \vec{x}) \neq 0$, τότε $[\vec{\alpha}(\vec{x} + \vec{\beta})]\vec{x} + [\vec{x}(\vec{\alpha} + \vec{x})]\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\beta} = -\frac{\vec{\alpha}(\vec{x} + \vec{\beta})}{\vec{x}(\vec{\alpha} + \vec{x})}\vec{x} \Rightarrow \vec{\beta} \parallel \vec{x}$ άτοπο.

Άρα $\begin{cases} \vec{\alpha}(\vec{x} + \vec{\beta}) = 0 \\ \vec{x}(\vec{\alpha} + \vec{x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{x} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{x} + \vec{x}^2 \Leftrightarrow \vec{x}^2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$ που είναι άτοπο.

Άρα $\vec{x} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{x} = \lambda \vec{\beta}$, οπότε η αρχική σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} [\vec{\alpha}(\lambda \vec{\beta} + \vec{\beta})]\lambda \vec{\beta} + [\lambda \vec{\beta}(\vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta})]\vec{\beta} &= \vec{0} \Leftrightarrow (\lambda \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\lambda \vec{\beta} + (\lambda \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \lambda^2 \vec{\beta}^2)\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \\ \lambda^2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}(\lambda \vec{\beta}) + (\lambda \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta} + (\lambda^2 \vec{\beta}^2)\vec{\beta} &= \vec{0} \Leftrightarrow [\lambda^2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) + 2\lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) + \lambda^2 \vec{\beta}^2]\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \\ \vec{\beta} = \vec{0} \text{ που είναι άτοπο ή} \end{aligned}$$

$$\lambda^2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) + 2\lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) + \lambda^2 \vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda[(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2)\lambda + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}] = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή}$$

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2)\lambda + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0.$$

Αν $\lambda = 0$, τότε $\vec{x} = \vec{0}$

Αν $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2)\lambda + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ (1) τότε

αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 0$ (1) γίνεται $2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ που είναι άτοπο, ενώ αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 \neq 0$ τότε

$$\lambda = -\frac{2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2}$$

41. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha}^2 \vec{\beta} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\alpha}$, να αποδείξετε ότι

α) $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$

β) $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2$

Λύση

α) Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

$$\text{Αν } \vec{\alpha} \neq \vec{0}, \text{ τότε } \vec{\alpha}^2 \vec{\beta} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2} \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\beta} \parallel \vec{\alpha}.$$

β) $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0^\circ \text{ ή } 180^\circ$ και τότε $\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \pm 1 \Leftrightarrow \cos^2(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1$

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = [|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta})]^2 = |\vec{\alpha}|^2 |\vec{\beta}|^2 \cos^2(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2$$

42. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι παράλληλα, αν και μόνο αν

$$(\vec{\beta}^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{\beta}^2 (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2.$$

Λύση

Εστω φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε:

$$\begin{aligned}
(\vec{\beta}^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 &= \vec{\beta}^2 (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 \Leftrightarrow \\
(\vec{\beta}^2)^2 + 2\vec{\beta}^2 (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 &= \vec{\beta}^2 (\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2) \Leftrightarrow \\
(\vec{\beta}^2)^2 + 2\vec{\beta}^2 (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 &= \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2 + 2\vec{\beta}^2 (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) + (\vec{\beta}^2)^2 \Leftrightarrow \\
(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 &= \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \\
(|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \varphi)^2 &= |\vec{\alpha}|^2 |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow \\
|\vec{\alpha}|^2 |\vec{\beta}|^2 \cos^2 \varphi - |\vec{\alpha}|^2 |\vec{\beta}|^2 &= 0 \Leftrightarrow \\
|\vec{\alpha}|^2 |\vec{\beta}|^2 (\cos^2 \varphi - 1) &= 0 \Leftrightarrow \\
|\vec{\alpha}|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0} &\quad \text{ή} \quad |\vec{\beta}|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\beta} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad \cos^2 \varphi = 1 \Leftrightarrow \\
\vec{\alpha} = \vec{0} &\quad \vec{\beta} = \vec{0} \quad \cos \varphi = 1 \quad \text{ή} \quad \cos \varphi = -1 \\
\text{άρα } \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} &\quad \varphi = 0^\circ \quad \text{ή} \quad \varphi = 180^\circ \\
&\quad \text{άρα } \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}
\end{aligned}$$

- 43.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις: $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} = |\vec{\beta}| \vec{a}$. Να αποδείξετε ότι $\vec{a} = \vec{\beta}$.

Λύση

Αν $|\vec{a}| = 0$, τότε $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{\beta} = \vec{0}$, οπότε $\vec{a} = \vec{\beta}$.
Αν $|\vec{a}| \neq 0$ τότε από τη σχέση $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{\beta}$, έχουμε:

$$|\vec{a}| = |\vec{a}| |\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{a}| |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a}| |\vec{\beta}|}{|\vec{a}|} \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = 1.$$

Τότε από τη σχέση $\vec{\beta} = |\vec{\beta}| \vec{a}$, προκύπτει ότι $\vec{\beta} = \vec{a}$.

- 44.** Αν για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $|\vec{a} + \vec{\beta}| + |\vec{a} - \vec{\beta}| = 2$ και $\vec{a}^2 + \vec{\beta}^2 = 2$, να αποδείξετε ότι $\vec{a} = \pm \vec{\beta}$.

Λύση

$$\begin{aligned}
|\vec{a} + \vec{\beta}| + |\vec{a} - \vec{\beta}| = 2 &\Leftrightarrow (|\vec{a} + \vec{\beta}| + |\vec{a} - \vec{\beta}|)^2 = 2^2 \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{\beta}|^2 + 2|\vec{a} + \vec{\beta}||\vec{a} - \vec{\beta}| + |\vec{a} - \vec{\beta}|^2 = 4 \Leftrightarrow \\
(\vec{a} + \vec{\beta})^2 + 2(\vec{a} + \vec{\beta})(\vec{a} - \vec{\beta}) + (\vec{a} - \vec{\beta})^2 &= 4 \Leftrightarrow \\
\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 + 2|\vec{a} + \vec{\beta}||\vec{a} - \vec{\beta}| + \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 &= 4 \Leftrightarrow \\
2(\vec{a}^2 + \vec{\beta}^2) + 2|\vec{a} + \vec{\beta}||\vec{a} - \vec{\beta}| &= 4 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 + 2|\vec{a} + \vec{\beta}||\vec{a} - \vec{\beta}| = 4 \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$2|\vec{\alpha} + \vec{\beta}||\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 0 \quad \text{ή} \quad |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 0$$

$$\text{Άρα } \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = -\vec{\beta} \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

45. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{x}$ ισχύει ότι $\vec{x} = |\vec{\beta}|\vec{\alpha} + |\vec{\alpha}|\vec{\beta}$ και $|\vec{x}| = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2$,

να αποδείξετε ότι:

α) $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$

β) $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

Λύση

α) Είναι $|\vec{x}| = \|\vec{\beta}\vec{\alpha} + \vec{\alpha}\vec{\beta}\| \leq \|\vec{\beta}\vec{\alpha}\| + \|\vec{\alpha}\vec{\beta}\| = |\vec{\beta}||\vec{\alpha}| + |\vec{\alpha}||\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$, όμως $|\vec{x}| = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2$, άρα

$$|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 \leq 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \leq 0 \Leftrightarrow (|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|)^2 \leq 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$$

β) Είναι $|\vec{x}| = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\alpha}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2$ και $\vec{x} = |\vec{\beta}|\vec{\alpha} + |\vec{\alpha}|\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\vec{\alpha} + |\vec{\alpha}|\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$, οπότε

$$|\vec{x}| = \|\vec{\alpha}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})\| = |\vec{\alpha}||\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\alpha}||\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|(2|\vec{\alpha}| - |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|) = 0 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{\alpha}| = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0} \text{ που είναι αδύνατο ή}$$

$$2|\vec{\alpha}| - |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\alpha}|^2 = 4|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow$$

$$2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2|\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2.$$

$$\text{Είναι } \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} = \frac{|\vec{\alpha}|^2}{|\vec{\alpha}||\vec{\alpha}|} = \frac{|\vec{\alpha}|^2}{|\vec{\alpha}|^2} = 1, \text{ άρα } (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0^\circ \text{ και } \vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}.$$

$$\text{Επειδή } \vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta} \text{ και } |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \text{ είναι } \vec{\alpha} = \vec{\beta}.$$

46. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{3}, |\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$. Έστω Ο σημείο

του επιπέδου τριγώνου ΑΒΓ για το οποίο ισχύει ότι: $\vec{OA} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \vec{OB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{OG} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΗ του τριγώνου.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

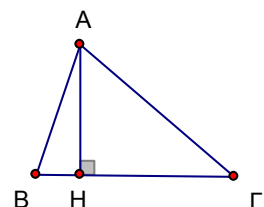
α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$

$$\vec{BG} = \vec{OG} - \vec{OB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta},$$

$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = \vec{\beta},$$

$$\text{Είναι } |\vec{BG}|^2 = (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 12 - 12 + 4 = 4 \Leftrightarrow |\vec{BG}| = 2, \quad |\vec{BA}| = |\vec{\beta}| = 2$$

Αρχικά θα υπολογίσουμε το $|\vec{BH}|$.



$$\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B\Gamma} \cdot \pi\text{ροβ}_{\overrightarrow{B\Gamma}} \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{B\Delta} \Leftrightarrow (2\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} = |\overrightarrow{B\Gamma}| \cdot |\overrightarrow{B\Delta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta}^2 = 2|\overrightarrow{B\Delta}| \Leftrightarrow 6 - 4 = 2|\overrightarrow{B\Delta}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{B\Delta}| = 1.$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ABH, έχουμε:

$$|\overrightarrow{BH}|^2 + |\overrightarrow{HA}|^2 = |\overrightarrow{BA}|^2 \Leftrightarrow 1 + |\overrightarrow{HA}|^2 = 4 \Leftrightarrow |\overrightarrow{HA}|^2 = 3 \Leftrightarrow |\overrightarrow{HA}| = \sqrt{3}$$

$$\text{β)} (AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{B\Gamma}| |\overrightarrow{HA}| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

47. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\gamma}| = 1, |\vec{\beta}| = 4$ και

$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Αν $(\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}) \perp (5\vec{\alpha} - 4\vec{\gamma})$, να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο μη μηδενικές συνιστώσες παράλληλες στα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$.

Λύση

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1 \cdot 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$(\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}) \perp (5\vec{\alpha} - 4\vec{\gamma}) \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}) \cdot (5\vec{\alpha} - 4\vec{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow 5\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + 10\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} - 8\vec{\gamma}^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5 + 6\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} - 8 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \frac{1}{2}$$

Εστω $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$ οι συνιστώσες του $\vec{\beta}$ με $\vec{\beta}_1 \parallel \vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}_2 \parallel \vec{\gamma}$. Τότε $\vec{\beta}_1 = \kappa \vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}_2 = \lambda \vec{\gamma}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$.

$$\text{Είναι } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2) \Leftrightarrow 2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}_1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}_2 \Leftrightarrow 2 = \vec{\alpha} \cdot (\kappa \vec{\alpha}) + \vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\gamma}) \Leftrightarrow$$

$$2 = \kappa \vec{\alpha}^2 + \lambda (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}) \Leftrightarrow 2 = \kappa + \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \lambda = 4 - 2\kappa \quad (1)$$

$$|\vec{\beta}|^2 = (\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2)^2 = (\kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\gamma})^2 \Leftrightarrow 16 = \kappa^2 \vec{\alpha}^2 + 2\kappa \lambda \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + \lambda^2 \vec{\gamma}^2 \Leftrightarrow \kappa^2 + \kappa \lambda + \lambda^2 = 16 \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\kappa^2 + \kappa(4 - 2\kappa) + (4 - 2\kappa)^2 = 16 \Leftrightarrow \kappa^2 + 4\kappa - 2\kappa^2 + 16 - 16\kappa + 4\kappa^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$3\kappa^2 - 12\kappa = 0 \Leftrightarrow 3\kappa(\kappa - 4) = 0 \stackrel{\kappa \neq 0}{\Leftrightarrow} \kappa = 4. \text{ Τότε } (1) \Rightarrow \lambda = -4.$$

Άρα $\vec{\beta}_1 = 4\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}_2 = -4\vec{\gamma}$.

48. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{a} = (3, 11)$ σε δύο συνιστώσες, μία παράλληλη στο $\vec{\beta} = (-1, 3)$ και μία κάθετη στο $\vec{\beta}$.

Λύση

Εστω $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ οι συνιστώσες του $\vec{a}$ με $\vec{\alpha}_1 \parallel \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}_2 \perp \vec{\beta}$. Τότε:

$$\vec{\alpha}_1 \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}_1 = \lambda \vec{\beta} \text{ και } \vec{\alpha}_2 \perp \vec{\beta}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \pi\text{ροβ}_{\vec{\beta}} \vec{a} \Leftrightarrow 3 \cdot (-1) + 11 \cdot 3 = \vec{\beta} \cdot \lambda \vec{\beta} \Leftrightarrow 30 = \lambda \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda \left(\sqrt{(-1)^2 + 3^2} \right)^2 = 30 \Leftrightarrow 10\lambda = 30 \Leftrightarrow \lambda = 3, \text{ άρα } \vec{\alpha}_1 = 3\vec{\beta} = (-3, 9)$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}_2 = \vec{a} - \vec{\alpha}_1 = (3, 11) - (-3, 9) = (6, 2)$$

49. Να βρείτε τη προβολή του διανύσματος $\vec{a} = (6, 8)$ στο διάνυσμα $\vec{\beta} = (2, 1)$.

Λύση

$$\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot (\lambda \vec{\beta}) \Leftrightarrow 6 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = \lambda \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda (\sqrt{2^2 + 1^2})^2 = 20 \Leftrightarrow 5\lambda = 20 \Leftrightarrow \lambda = 4$$

$$\text{Τότε } \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{a} = 4\vec{\beta} = (8, 4)$$

50. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{\beta} = -2\vec{i} + 8\vec{j}$. Να αναλύσετε το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{a}$.

Λύση

Εστω $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2$ οι συνιστώσες του $\vec{\beta}$ με $\vec{\beta}_1 \parallel \vec{a}$. Επειδή $\vec{\beta}_1 \perp \vec{\beta}_2$, θα είναι και $\vec{a} \perp \vec{\beta}_2$.

Επειδή $\vec{\beta}_1 \parallel \vec{a}$ είναι $\vec{\beta}_1 = \lambda \vec{a} = \lambda \vec{i} + \lambda \vec{j}$. Είναι

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\beta}_1 \Leftrightarrow (\vec{i} + \vec{j}) \cdot (-2\vec{i} + 8\vec{j}) = (\vec{i} + \vec{j}) \cdot (\lambda \vec{i} + \lambda \vec{j}) \Leftrightarrow$$

$$-2\vec{i}^2 + 8\vec{j}^2 - 2\vec{i} \cdot \vec{j} + 8\vec{j}^2 = \lambda \vec{i}^2 + \lambda \vec{j}^2 + \lambda \vec{i} \cdot \vec{j} + \lambda \vec{j}^2 \Leftrightarrow$$

$$-2 + 8 = \lambda + \lambda \Leftrightarrow 2\lambda = 6 \Leftrightarrow \lambda = 3. \text{ Τότε } \vec{\beta}_1 = 3\vec{i} + 3\vec{j} \text{ και}$$

$$\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 \Leftrightarrow \vec{\beta}_2 = \vec{\beta} - \vec{\beta}_1 = -2\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{i} + 3\vec{j} = -5\vec{i} + 11\vec{j}.$$

51. Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$, να βρείτε τη προβολή του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{a} + 2\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{a}$.

Λύση

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| |\vec{\beta}| \cos \frac{2\pi}{3} = 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

Είναι $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\gamma} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\gamma} = \lambda \vec{a}$

$$\vec{a} \cdot \vec{\gamma} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot (3\vec{a} + 2\vec{\beta}) = \vec{a} \cdot \lambda \vec{a} \Leftrightarrow 3\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \lambda \vec{a}^2 \Leftrightarrow$$

$$3|\vec{a}|^2 - 2 = \lambda |\vec{a}|^2 \Leftrightarrow 12 - 2 = 4\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{2}, \text{ άρα } \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\gamma} = \frac{5}{2} \vec{a}$$

52. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (4, 3)$ και $\vec{\beta} = (1, 2)$. Να βρείτε τη προβολή του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{a} + 5\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

Λύση

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 10$$

Είναι $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\gamma} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\gamma} = \lambda \vec{\beta}$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot (\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}) = \vec{\beta} \cdot \lambda \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 5\vec{\beta}^2 = \lambda \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow$$

$$10 + 5(\sqrt{1^2 + 2^2})^2 = \lambda(\sqrt{1^2 + 2^2})^2 \Leftrightarrow 35 = 5\lambda \Leftrightarrow \lambda = 7. \text{ Άρα } \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\gamma} = 7\vec{\beta}.$$

53. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-4, 3)$ και $\vec{b} = (4, 2)$. Να βρείτε τη προβολή του

διανύσματος $\vec{\gamma} = \frac{1}{2}(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 \vec{b}$ πάνω στο $\vec{a}$.

Λύση

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = -10, \quad |\vec{\beta}|^2 = (\sqrt{4^2 + 2^2})^2 = 20, \text{ άρα } \vec{\gamma} = 5\vec{a} + 5\vec{b}$$

$$\text{Είναι } \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\gamma} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\gamma} = \lambda \vec{a}$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot (5\vec{a} + 5\vec{b}) = \vec{\alpha} \cdot \lambda \vec{a} \Leftrightarrow 5\vec{\alpha}^2 + 5\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda \vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow$$

$$5|\vec{\alpha}|^2 - 50 = \lambda |\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(-4)^2 + 3^2}\right)^2 - 50 = \lambda \left(\sqrt{(-4)^2 + 3^2}\right)^2 \Leftrightarrow 25 - 50 = 25\lambda \Leftrightarrow \lambda = -1$$

$$\text{Άρα } \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\gamma} = -\vec{a} = (4, -3).$$

54. Αν $\vec{a} = (8, 6)$ και $\vec{b} = (6, 2)$, να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{a}}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{8}{5}\vec{a}$.

Λύση

$$\text{Είναι } \text{προβ}_{\vec{a}}(\vec{a} + \vec{b}) \parallel \vec{a}, \text{ άρα } \text{προβ}_{\vec{a}}(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a}.$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}}(\vec{a} + \vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \lambda \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda \vec{a}^2 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda |\vec{a}|^2 \Leftrightarrow (\sqrt{8^2 + 6^2})^2 + 8 \cdot 6 + 6 \cdot 2 = \lambda (\sqrt{8^2 + 6^2})^2 \Leftrightarrow$$

$$160 = 100 \cdot \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{160}{100} = \frac{8}{5}$$

$$\text{Άρα } \text{προβ}_{\vec{a}}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{8}{5}\vec{a}.$$

55. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ και $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ έτσι ώστε να ισχύει: $\text{προβ}_{\vec{b}}(\vec{a} + \lambda \vec{b}) = 4\vec{b}$.

Λύση

$$\vec{b}(\vec{a} + \lambda \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{προβ}_{\vec{b}}(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda \vec{b}^2 = \vec{b} \cdot 4\vec{b} \Leftrightarrow$$

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{2\pi}{3} + \lambda|\vec{b}|^2 = 4\vec{b}^2 \Leftrightarrow 4 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \lambda \cdot 2^2 = 4|\vec{b}|^2 \Leftrightarrow -4 + 4\lambda = 16 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda = 20 \Leftrightarrow \lambda = 5$$

56. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{5\pi}{6}$.

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ έτσι ώστε να ισχύει: $\text{προβ}_{\vec{\alpha}-3\vec{\beta}}(\lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \vec{0}$.

Λύση

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \frac{5\pi}{6} = \sqrt{3} \cdot 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -3$$

$$(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})(\lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}-3\vec{\beta}}(\lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \cdot \vec{0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3\lambda\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda|\vec{\alpha}|^2 - 3 + 9\lambda - 3|\vec{\beta}|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\lambda - 3 + 9\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow 12\lambda = 15 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{4}$$

57. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

β) Να υπολογίσετε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει:

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\kappa\vec{\alpha} + (2 - \kappa)\vec{\beta}) = 4\kappa\vec{\alpha} - 2\lambda\vec{\beta}$$

Λύση

α) Αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, τότε $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0^\circ$ ή 180° , άρα $\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1$ ή -1 και

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2} \text{ ή } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| = -2\sqrt{2} \text{ που είναι άτοπο.}$$

β) $\vec{\alpha}(\kappa\vec{\alpha} + (2 - \kappa)\vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\kappa\vec{\alpha} + (2 - \kappa)\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\alpha}(\kappa\vec{\alpha} + (2 - \kappa)\vec{\beta}) = \vec{\alpha}(4\kappa\vec{\alpha} - 2\lambda\vec{\beta}) \Leftrightarrow$

$$\kappa\vec{\alpha}^2 + (2 - \kappa)\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4\kappa\vec{\alpha}^2 - 2\lambda\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow 2\kappa + 2(2 - \kappa) = 8\kappa - 4\lambda \Leftrightarrow$$

$$8\kappa - 4\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2\kappa - 1 \quad (1)$$

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\kappa\vec{\alpha} + (2 - \kappa)\vec{\beta}) \parallel \vec{\alpha} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\kappa\vec{\alpha} + (2 - \kappa)\vec{\beta}) = x\vec{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$4\kappa\vec{\alpha} - 2\lambda\vec{\beta} = x\vec{\alpha} \Leftrightarrow (4\kappa - x)\vec{\alpha} - 2\lambda\vec{\beta} = \vec{0}$$

$$\text{Αν } 4\kappa - x \neq 0, \text{ τότε } \vec{\alpha} = \frac{2\lambda}{4\kappa - x}\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \text{ που είναι άτοπο.}$$

$$\text{Αν } \lambda \neq 0, \text{ τότε } \vec{\beta} = \frac{4\kappa - x}{2\lambda}\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\beta} \parallel \vec{\alpha} \text{ που είναι άτοπο.}$$

$$\text{Άρα } 4\kappa - x = 0 \Leftrightarrow x = 4\kappa \text{ και } \lambda = 0. \text{ Τότε από την (1) είναι } \kappa = \frac{1}{2}.$$

58. Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι οι κάθετες συνιστώσες διανύσματος $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\gamma}| = 5\sqrt{5}$ και $\vec{\alpha} = (3, -6)$. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

Λύση

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| |\vec{\gamma}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = |\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow$$

$$\cos(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \frac{|\vec{\alpha}|^2}{|\vec{\alpha}| |\vec{\gamma}|} = \frac{\sqrt{3^2 + (-6)^2}}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{45}}{5\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = \frac{3}{5}$$

$$\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\beta}| |\vec{\gamma}| \cos(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$$

$$5\sqrt{5} \cos[90^\circ - (\vec{\alpha}, \vec{\gamma})] = |\vec{\beta}| \Leftrightarrow 5\sqrt{5} \sin(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = |\vec{\beta}| \quad (1)$$

$$\text{Είναι } \eta\mu^2(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) + \cos^2(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \text{ και}$$

$$\text{επειδή } (\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) < 90^\circ \text{ είναι } \eta\mu(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \frac{4}{5} \quad (2).$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1), (2), προκύπτει ότι: } 5\sqrt{5} \cdot \frac{4}{5} = |\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = 4\sqrt{5}.$$

$$\text{Εστω ότι } \vec{\beta} = (x, y), \text{ τότε } |\vec{\beta}| = 4\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4\sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 80 \quad (3)$$

$$\text{Επειδή τα } \vec{\alpha}, \vec{\beta} \text{ είναι συνιστώσες του } \vec{\gamma} \text{ ισχύει ότι: } \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} = (3, -6) + (x, y) = (x+3, y-6)$$

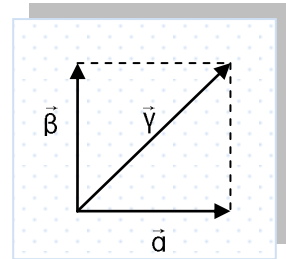
$$\text{Επειδή } \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha}^2, \text{ έχουμε}$$

$$3(x+3) - 6(y-6) = \left(\sqrt{3^2 + (-6)^2}\right)^2 \Leftrightarrow 3x + 9 - 6y + 36 = 45 \Leftrightarrow x = 2y \quad (4)$$

$$\text{Η σχέση (3), λόγω της (4) γίνεται: } 4y^2 + y^2 = 80 \Leftrightarrow 5y^2 = 80 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$$

$$\text{Αν } y = 4, \text{ τότε (4) } \Rightarrow x = 2 \cdot 4 = 8 \text{ και } \vec{\beta} = (8, 4), \vec{\gamma} = (8+3, 4-6) = (11, -2).$$

$$\text{Αν } y = -4, \text{ τότε (4) } \Rightarrow x = 2 \cdot (-4) = -8 \text{ και } \vec{\beta} = (-8, -4), \vec{\gamma} = (-8+3, -4-6) = (-5, -10)$$



- 59.** Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι: $3\vec{\beta} - \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \vec{0}$ και $\vec{\alpha} - 4\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \vec{0}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|\sqrt{3}$

β) $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$.

Λύση

α) $3\vec{\beta} - \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = 3\vec{\beta}, \vec{\alpha} - 4\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha}}{4}$

$$\text{Είναι } \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot (3\vec{\beta}) = 3\vec{\beta}^2 \text{ και}$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\alpha}}{4} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha}^2}{4}, \text{ άρα}$$

$$\frac{\vec{\alpha}^2}{4} = 3\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 = 12|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = 2\sqrt{3}|\vec{\beta}|$$

β) $\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|} = \frac{3\vec{\beta}^2}{2\sqrt{3}|\vec{\beta}| |\vec{\beta}|} = \frac{3|\vec{\beta}|^2}{2\sqrt{3}|\vec{\beta}|^2} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ άρα } (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$

60. Αν $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$ με $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$, να αποδείξετε ότι: $|\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}| = |\vec{a}| - |\vec{\beta}|$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \vec{a} \cdot \vec{v} &= \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{\beta}) = |\vec{a}| \cdot |\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}| \sin 0^\circ \Leftrightarrow \\ \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{\beta} &= |\vec{a}| \cdot |\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}| \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \sin \frac{2\pi}{3} = |\vec{a}| \cdot |\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}| \Leftrightarrow \\ |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \left(-\frac{1}{2}\right) &= |\vec{a}| \cdot |\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}| \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot |\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}| \Leftrightarrow \\ |\vec{a}|(|\vec{a}| - |\vec{\beta}|) &= |\vec{a}| \cdot |\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}| \stackrel{|\vec{a}| \neq 0}{\Leftrightarrow} |\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}| = |\vec{a}| - |\vec{\beta}| \end{aligned}$$

61. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $\vec{a} \neq \vec{0}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$

β) $|\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{\beta}|}{|\vec{a}|}$

Λύση

α) Επειδή $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} \parallel \vec{a}$, ισχύει ότι: $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v} = \lambda \vec{a}$ (1).

$$\text{Είναι } \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \lambda \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \lambda \vec{a}^2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = \lambda |\vec{a}|^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}|^2}$$

$$\text{Τότε η σχέση (1) γίνεται: } \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}.$$

β) $|\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta}| = \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{\beta}|}{|\vec{a}|^2} \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{\beta}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{\beta}|}{|\vec{a}|}$

62. Αν $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $\text{προβ}_{\vec{a}} (\mu \vec{\beta} + \nu \vec{\gamma}) = \mu \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} + \nu \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\gamma}$.

Λύση

$$\text{προβ}_{\vec{a}} (\mu \vec{\beta} + \nu \vec{\gamma}) \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{a}} (\mu \vec{\beta} + \nu \vec{\gamma}) = \chi \vec{a},$$

$$\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} = \kappa \vec{a} \text{ και } \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\gamma} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\gamma} = \lambda \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\mu \vec{\beta} + \nu \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} (\mu \vec{\beta} + \nu \vec{\gamma}) \Leftrightarrow \mu \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \nu \vec{a} \cdot \vec{\gamma} = \vec{a} \cdot (\chi \vec{a}) \Leftrightarrow$$

$$\mu \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} + \nu \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\gamma} = \chi \vec{a}^2 \Leftrightarrow$$

$$\mu \vec{a} \cdot (\kappa \vec{a}) + \nu \vec{a} \cdot (\lambda \vec{a}) = \chi \vec{a}^2 \Leftrightarrow \mu \kappa \vec{a}^2 + \nu \lambda \vec{a}^2 = \chi \vec{a}^2 \stackrel{\vec{a} \neq \vec{0}}{\Leftrightarrow} \mu \kappa + \nu \lambda = \chi$$

$$\text{Τότε } \text{προβ}_{\vec{a}} (\mu \vec{\beta} + \nu \vec{\gamma}) = (\mu \kappa + \nu \lambda) \vec{a} = \mu \kappa \vec{a} + \nu \lambda \vec{a} = \mu \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} + \nu \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\gamma}$$

63. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, -3)$, $B(-3, 0)$ και $\Gamma(4, 4)$. Αν $A\Delta$ το ύψος του τριγώνου, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{B\Delta}$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{B\Delta} = \text{προβ}_{\overrightarrow{B\Gamma}} \overrightarrow{BA}$.

Επειδή $\overrightarrow{B\Delta} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$, ισχύει ότι $\overrightarrow{B\Delta} = \lambda \overrightarrow{B\Gamma}$.

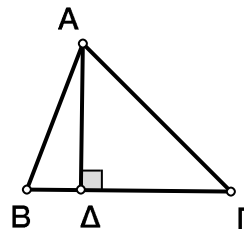
$$\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B\Gamma} \cdot \text{προβ}_{\overrightarrow{B\Gamma}} \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{B\Delta} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B\Gamma} \cdot \lambda \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{BA} = \lambda |\overrightarrow{B\Gamma}|^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{BA} = \lambda |\overrightarrow{B\Gamma}|^2 \quad (1).$$

$$\text{Είναι } \overrightarrow{BA} = (1+3, -3-0) = (4, -3) \text{ και } \overrightarrow{B\Gamma} = (4+3, 4-0) = (7, 4).$$

$$\text{Η σχέση (1) γίνεται: } 4 \cdot 7 + (-3) \cdot 4 = \lambda (\sqrt{7^2 + 4^2})^2 \Leftrightarrow 16 = 65 \cdot \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{16}{65}.$$

$$\text{Τότε } \overrightarrow{B\Delta} = \frac{16}{65} (7, 4) = \left(\frac{112}{65}, \frac{64}{65} \right).$$



64. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(3, -2)$, $B(0, 1)$ και $\Gamma(4, 5)$. Να βρείτε

- α) τη προβολή της $A\Gamma$ στη $B\Gamma$. Τι συμπέρασμα προκύπτει για το τρίγωνο $AB\Gamma$;
β) τη προβολή της διαμέσου AM στη $B\Gamma$.

Λύση

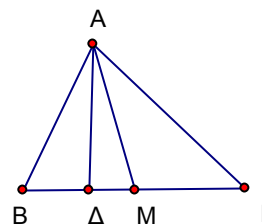
α) Είναι $\overrightarrow{A\Gamma} = (4-3, 5+2) = (1, 7)$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = (4-0, 5-1) = (4, 4)$.

$$\text{προβ}_{\overrightarrow{B\Gamma}} \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} \parallel \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \lambda \overrightarrow{B\Gamma}$$

$$\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma} \cdot \text{προβ}_{\overrightarrow{B\Gamma}} \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma} \cdot (\lambda \overrightarrow{B\Gamma}) = \lambda |\overrightarrow{B\Gamma}|^2 \Leftrightarrow$$

$$1 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = \lambda (\sqrt{4^2 + 4^2})^2 \Leftrightarrow 32 = 32\lambda \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Τότε $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \Delta \equiv B$, δηλαδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο B .



β) Είναι $x_M = \frac{0+4}{2} = 2$, $y_M = \frac{1+5}{2} = 3$ δηλαδή το M έχει συντεταγμένες $(2, 3)$ και

$$\overrightarrow{AM} = (2-3, 3+2) = (-1, 5).$$

$$\text{προβ}_{\overrightarrow{B\Gamma}} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\Delta M} \parallel \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta M} = k \overrightarrow{B\Gamma}$$

$$\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{B\Gamma} \cdot \text{προβ}_{\overrightarrow{B\Gamma}} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{B\Gamma} \cdot (k \overrightarrow{B\Gamma}) = k |\overrightarrow{B\Gamma}|^2 \Leftrightarrow$$

$$4(-1) + 4 \cdot 5 = k (\sqrt{4^2 + 4^2})^2 \Leftrightarrow 16 = 32k \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}, \text{ άρα } \overrightarrow{\Delta M} = \frac{1}{2} \overrightarrow{B\Gamma} = \frac{1}{2} (4, 4) = (2, 2)$$

65. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $(AB) = 2$, $(A\Gamma) = 6$ και $A = 60^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τη προβολή του $A\Gamma$ στην AB .

β) Αν M μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{B\Gamma} \overrightarrow{AM} = \frac{4}{13} \overrightarrow{B\Gamma}$.

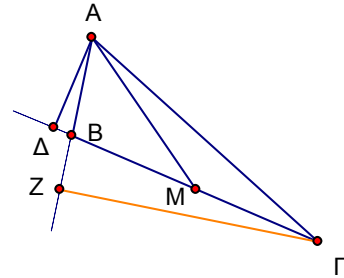
Λύση

α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{A\Gamma}| \cos A = 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 6$

Είναι $\text{προβ}_{AB} \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AZ} \parallel \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \text{προβ}_{AB} \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB}$

Είναι $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} \cdot \text{προβ}_{AB} \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB}^2 \Leftrightarrow 6 = 4\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2}$.

Άρα $\text{προβ}_{AB} \overrightarrow{A\Gamma} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB}$



β) Είναι $\text{προβ}_{B\Gamma} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\Delta M} = \kappa \overrightarrow{B\Gamma}$

$$\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{B\Gamma} \cdot \text{προβ}_{B\Gamma} \overrightarrow{AM} = \kappa \overrightarrow{B\Gamma}^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}) \cdot \frac{\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{AB}}{2} = \kappa (\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB})^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\overrightarrow{A\Gamma}^2 - \overrightarrow{AB}^2}{2} = \kappa (\overrightarrow{A\Gamma}^2 - 2\overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2) \Leftrightarrow |\overrightarrow{A\Gamma}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = 2\kappa (|\overrightarrow{A\Gamma}|^2 - 12 + |\overrightarrow{AB}|^2) \Leftrightarrow$$

$$36 - 4 = 2\kappa (36 - 12 + 4) \Leftrightarrow 32 = 56\kappa \Leftrightarrow \kappa = \frac{4}{13}. \text{ Άρα } \text{προβ}_{B\Gamma} \overrightarrow{AM} = \frac{4}{13} \overrightarrow{B\Gamma}$$

66. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει ότι $|\text{προβ}_{AB} \overrightarrow{A\Gamma}| = |\text{προβ}_{A\Gamma} \overrightarrow{AB}|$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

Λύση

Είναι $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{AB} \cdot \text{προβ}_{AB} \overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \text{προβ}_{A\Gamma} \overrightarrow{AB}$. Άρα

$$|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{A\Gamma}| \cos A = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\text{προβ}_{AB} \overrightarrow{A\Gamma}| \cos 0^\circ \Leftrightarrow |\overrightarrow{A\Gamma}| \cos A = |\text{προβ}_{AB} \overrightarrow{A\Gamma}| \text{ και}$$

$$|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{A\Gamma}| \cos A = |\overrightarrow{A\Gamma}| \cdot |\text{προβ}_{A\Gamma} \overrightarrow{AB}| \cos 0^\circ \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| \cos A = |\text{προβ}_{A\Gamma} \overrightarrow{AB}|.$$

Επειδή $|\text{προβ}_{AB} \overrightarrow{A\Gamma}| = |\text{προβ}_{A\Gamma} \overrightarrow{AB}|$, ισχύει ότι:

$$|\overrightarrow{A\Gamma}| \cos A = |\overrightarrow{AB}| \cos A \Leftrightarrow |\overrightarrow{A\Gamma}| \cos A - |\overrightarrow{AB}| \cos A = 0 \Leftrightarrow \cos A (|\overrightarrow{A\Gamma}| - |\overrightarrow{AB}|) = 0 \Leftrightarrow$$

$\cos A = 0$ άρα $A = 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή

$|\overrightarrow{A\Gamma}| = |\overrightarrow{AB}|$, δηλαδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

67. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ για τα οποία ισχύει ότι: $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{b} = \text{προβ}_{\vec{b}} \vec{a}$.

Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι ίσα ή κάθετα.

Λύση

$$\text{Είναι } \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{b} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{b} = \kappa \vec{a} \text{ και } \text{προβ}_{\vec{b}} \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda \vec{b}$$

$$\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{b} = \text{προβ}_{\vec{b}} \vec{a} \Leftrightarrow \kappa \vec{a} = \lambda \vec{b}$$

Αν $\kappa=0$, τότε $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\vec{0}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

Αν $\kappa\neq 0$, τότε $\vec{\alpha}=\frac{\lambda}{\kappa}\vec{\beta}$

$$\text{Είναι } \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}\Leftrightarrow\frac{\lambda}{\kappa}\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot(\lambda\vec{\beta})\Leftrightarrow\frac{\lambda}{\kappa}|\vec{\beta}|^2=\lambda|\vec{\beta}|^2\Leftrightarrow$$

$$\lambda=\kappa\lambda\Leftrightarrow\lambda-\kappa\lambda=0\Leftrightarrow\lambda(1-\kappa)=0\Leftrightarrow\lambda=0\text{ ή }\kappa=1$$

Αν $\lambda=0$, τότε $\vec{\alpha}=\frac{\lambda}{\kappa}\vec{\beta}=\vec{0}$, που είναι άτοπο.

Αν $\kappa=1$, τότε $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$. Τότε

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}^2\Leftrightarrow\lambda\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}^2\Leftrightarrow\lambda\vec{\beta}^2=\vec{\alpha}^2\Leftrightarrow\lambda=\frac{|\vec{\alpha}|^2}{|\vec{\beta}|^2}\Leftrightarrow$$

$$\lambda=\frac{|\lambda\vec{\beta}|^2}{|\vec{\beta}|^2}\Leftrightarrow\lambda=\frac{\lambda^2|\vec{\beta}|^2}{|\vec{\beta}|^2}\Leftrightarrow\lambda-\lambda^2=0\Leftrightarrow\lambda(1-\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda=0\text{ ή }\lambda=1.$$

Για $\lambda=1$ είναι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

68. α) Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ ισχύει ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}$, $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\beta}\cdot\vec{\delta}$ και $\vec{\alpha}\nparallel\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma}=\vec{\delta}$.

β) Αν $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}=\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\delta}$ και $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}=\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\delta}$ να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma}=\vec{\delta}$.

Λύση

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\delta})=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp(\vec{\gamma}-\vec{\delta})$

$$\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\beta}\cdot\vec{\delta}\Leftrightarrow\vec{\beta}\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\delta})=0\Leftrightarrow\vec{\beta}\perp(\vec{\gamma}-\vec{\delta}).$$

Εστω $\vec{x}=\vec{\gamma}-\vec{\delta}$. Επειδή το διάνυσμα $\vec{x}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι $\vec{x}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$.

$$|\vec{x}|^2=\vec{x}\cdot\vec{x}=(\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})\cdot(\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})=\kappa^2\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}+2\kappa\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\lambda^2\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\gamma}-\vec{\delta}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\gamma}=\vec{\delta}$$

β) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\delta}$, οπότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}$ (1).

Είναι $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\beta}\cdot\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{\delta}=\vec{\beta}\cdot\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\delta}$, άρα $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\beta}\cdot\vec{\delta}$ (2).

Από τις (1),(2) σύμφωνα με το α σκέλος είναι $\vec{\gamma}=\vec{\delta}$.

69. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=2$, $(\hat{\vec{\alpha}}, \hat{\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$ και $\vec{\gamma}=\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

α) Να βρείτε το κ για το οποίο το $|\vec{\gamma}|$ γίνεται ελάχιστο.

Εστω $\kappa=-\frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}$ **γ)** $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma}=\frac{1}{2}\vec{\beta}$

Λύση

$$\alpha) \vec{\alpha}, \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$|\vec{\gamma}|^2 = (\chi \vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \chi^2 \vec{\alpha}^2 + 2\chi \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = \chi^2 |\vec{\alpha}|^2 + 4\chi + |\vec{\beta}|^2 = 4\chi^2 + 4\chi + 4 \Leftrightarrow$$

$$|\vec{\gamma}| = 2\sqrt{\chi^2 + \chi + 1}$$

Το $|\vec{\gamma}|$ γίνεται ελάχιστο όταν το τριώνυμο $\chi^2 + \chi + 1$ γίνει ελάχιστο. Αυτό συμβαίνει όταν

$$\chi = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{1}{2}.$$

$$\beta) \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot \left(\vec{\beta} - \frac{1}{2} \vec{\alpha} \right) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \frac{1}{2} \vec{\alpha}^2 = 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$$

$$\gamma) \text{Είναι } \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\gamma} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\gamma} = \lambda \vec{\beta}.$$

$$\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot \left(\vec{\beta} - \frac{1}{2} \vec{\alpha} \right) = \vec{\beta} \cdot (\lambda \vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\beta}^2 - \frac{1}{2} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lambda \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 4 - 2 = 4\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Τότε } \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\gamma} = \frac{1}{2} \vec{\beta}.$$

70. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A = 60^\circ$, $\vec{AB} = \vec{\alpha}$, $\vec{AG} = \vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$. Έστω M το μέσο της ΒΓ και σημείο Δ τέτοιο, ώστε $2\vec{AD} + 3\vec{AG} = 5\vec{AB}$.

α) Να αποδείξετε ότι το Β βρίσκεται μεταξύ των Γ, Δ.

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$ συναρτήσει του $|\vec{\alpha}|$.

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AD} \cdot \vec{AM}$ συναρτήσει του $|\vec{\alpha}|$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\angle AM > 90^\circ$.

ε) Να αποδείξετε ότι $B = 90^\circ$.

στ) Να υπολογιστεί η προβολή του $\vec{AD}$ στο $\vec{GB}$.

Λύση

$$\alpha) 2\vec{AD} + 3\vec{AG} = 5\vec{AB} \Leftrightarrow 2\vec{AD} + 3\vec{AG} = 3\vec{AB} + 2\vec{AB} \Leftrightarrow 3\vec{AG} - 3\vec{AB} = 2\vec{AB} - 2\vec{AD} \Leftrightarrow$$

$$3(\vec{AG} - \vec{AB}) = 2(\vec{AB} - \vec{AD}) \Leftrightarrow 3\vec{BG} = 2\vec{DB} \Leftrightarrow \vec{DB} = \frac{3}{2}\vec{BG} \Rightarrow \vec{DB} \uparrow \vec{BG}, \text{ άρα το B βρίσκεται μεταξύ των Γ, Δ.}$$

$$\beta) \vec{AB} \cdot \vec{AG} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AG}| \cos A = |\vec{\alpha}| \cdot 2|\vec{\alpha}| \cos 60^\circ = 2|\vec{\alpha}|^2 \cdot \frac{1}{2} = |\vec{\alpha}|^2$$

$$\gamma) \text{Είναι } 2\vec{AD} + 3\vec{AG} = 5\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AD} = \frac{5}{2}\vec{AB} - \frac{3}{2}\vec{AG} \text{ και } \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AG}, \text{ άρα}$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{AM} = \left(\frac{5}{2}\vec{AB} - \frac{3}{2}\vec{AG} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AG} \right) = \frac{5}{4}|\vec{AB}|^2 + \frac{5}{4}\vec{AB} \cdot \vec{AG} - \frac{3}{4}\vec{AB} \cdot \vec{AG} - \frac{3}{4}|\vec{AG}|^2 \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{5}{4}|\vec{\alpha}|^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} - \frac{3}{4}4|\vec{\alpha}|^2 = \frac{5}{4}|\vec{\alpha}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{\alpha}|^2 - 3|\vec{\alpha}|^2 = -\frac{5}{4}|\vec{\alpha}|^2$$

$$\delta) \cos(\widehat{A\Delta, AM}) = \frac{\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{A\Delta}| |\overrightarrow{AM}|} = \frac{-\frac{5}{4}|\vec{\alpha}|^2}{|\overrightarrow{A\Delta}| |\overrightarrow{AM}|} < 0 \Rightarrow (\widehat{A\Delta, AM}) > 90^\circ$$

$$\epsilon) \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = -\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{AB}^2 = -|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\alpha}|^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$$

$$\sigma) \text{ Είναι } \text{προβ}_{\overrightarrow{\Gamma B}} \overrightarrow{A\Delta} \parallel \overrightarrow{\Gamma B} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\overrightarrow{\Gamma B}} \overrightarrow{A\Delta} = \lambda \overrightarrow{\Gamma B}$$

$$\overrightarrow{\Gamma B} \cdot \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B} \cdot \text{προβ}_{\overrightarrow{\Gamma B}} \overrightarrow{A\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma B} \cdot \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B} \cdot \lambda \overrightarrow{\Gamma B} \Leftrightarrow$$

$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma}) \left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Gamma} \right) = \lambda (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma})^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} - \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} + \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Gamma}^2 = \lambda \overrightarrow{AB}^2 - 2\lambda \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} + \lambda \overrightarrow{A\Gamma}^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{2}|\vec{\alpha}|^2 - 4|\vec{\alpha}|^2 + \frac{3}{2}4|\vec{\alpha}|^2 = \lambda |\vec{\alpha}|^2 - 2\lambda |\vec{\alpha}|^2 + 4\lambda |\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \frac{9}{2}|\vec{\alpha}|^2 = 3\lambda |\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$

$$\text{Άρα } \text{προβ}_{\overrightarrow{\Gamma B}} \overrightarrow{A\Delta} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\Gamma B} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma}).$$

Στέλιος Μιχαήλογλου