1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

1. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ = , τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$. Σ Λ

2. Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$, τότε $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Σ Λ

3. Αν $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$, τότε $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) + (\widehat{\vec{\beta}, \vec{\alpha}}) = 2\pi$. Σ Λ

4. Ισχύει η ισοδυναμία: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow$ Μ μέσο του $\overline{AB}$. Σ Λ

5. Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ ισχύει: $\left(-\vec{u},\vec{v}\right) = 180 - \left(\vec{u},\vec{v}\right)$ Σ Λ

6. Αν $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow\uparrow -\vec{\gamma}$ τότε $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$. Σ Λ

7. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Τότε:

ι)	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$	Σ	Λ
ιι)	$\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$	Σ	Λ
ιιι)	$\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$	Σ	Λ
ιν)	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{\Gamma\Delta}\rvert$	Σ	Λ
ν)	$\lvert\overrightarrow{A\Gamma}\rvert = \lvert\overrightarrow{\Delta B}\rvert$	Σ	Λ
νι)	$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{B\Delta}\right) = \frac{\pi}{4}$	Σ	Λ

8. Εστω Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ και τα διανύσματα $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{N\Lambda} = \overrightarrow{AB}$. Να δειχθεί ότι τα τμήματα ΜΚ, ΝΛ και ΒΓ έχουν κοινό μέσο.

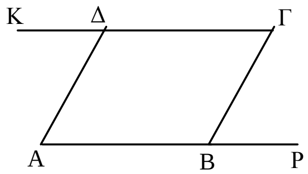
9. Δίνονται δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΑΕΓΖ (με κοινή διαγώνιο ΑΓ). Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{E\Delta}$ και $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{Z\Delta}$.

10. Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε ισχύουν οι ισότητες $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$ και $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{\Delta A}$, να αποδείξετε ότι Δ είναι μέσο του ΓΕ.

1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ – ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

11. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ, ΓΔ τα τμήματα ΒΡ=ΔΚ. Ποια από τα παρακάτω είναι σωστά ή λάθος.

ι)	$\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{A\Gamma}$	Σ	Λ
ιι)	$\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma K} = \overrightarrow{BK}$	Σ	Λ
ιιι)	$\overrightarrow{AK} \uparrow\uparrow \overrightarrow{P\Gamma}$	Σ	Λ
ιν)	$\overrightarrow{A\Delta} = -\overrightarrow{B\Gamma}$	Σ	Λ



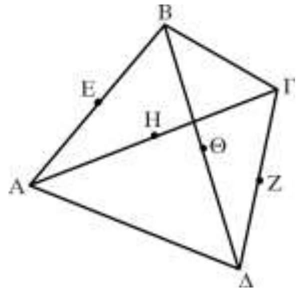
v) $\overrightarrow{K\Delta} = \overrightarrow{BP}$ Σ Λ

vi) $\left(\overrightarrow{\Delta K}, \overrightarrow{\Delta A}\right) = \left(\overrightarrow{\Gamma B}, \overrightarrow{BP}\right)$ Σ Λ

12. Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$, τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. **Σ** **Λ**

13. Με πλευρές οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ τέτοια ώστε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$ ορίζεται τρίγωνο. **Σ** **Λ**

14. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι κυρτό τετράπλευρο και τα Ε, Ζ, Η, Θ μέσα αντιστοίχως των πλευρών ΑΒ, ΓΔ, ΑΓ και ΒΔ. Λανθασμένη είναι η σχέση:



Α. $\overrightarrow{H\Theta} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Theta} + \overrightarrow{HA}$

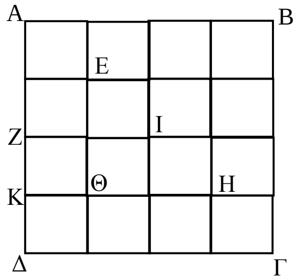
Β. $\overrightarrow{H\Theta} = \overrightarrow{B\Theta} + \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{H\Gamma}$

Γ. $\overrightarrow{H\Theta} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Theta}$

Δ. $\overrightarrow{H\Theta} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Theta} + \overrightarrow{\Gamma H}$

Ε. $2\overrightarrow{H\Theta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

15. Να συμπληρωθούν τα κενά στις παρακάτω ισότητες , με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα:

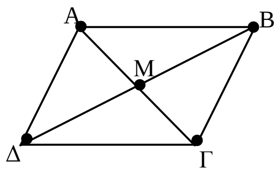


α) $\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{\Theta H} = \overrightarrow{E\Gamma} - \overrightarrow{\ldots Z}$

β) $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ZE} - \overrightarrow{\Theta\ldots}$

γ) $\overrightarrow{H\Gamma} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{\ldots\Gamma}$

16. Για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, να συμπληρώσετε τις ισότητες:



ι) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} = \ldots$

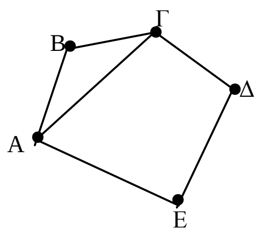
ιι) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \ldots\right)$

ιιι) $\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Gamma} = \ldots$

ιv) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{B\Gamma} = \ldots$

v) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Delta} + \ldots = \vec{0}$

17. Για το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ, ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή;



ι) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}\right| > \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|$

ιι) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}\right| = \left|\overrightarrow{\Delta E} + \overrightarrow{EA}\right|$

ιιι) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} - \overrightarrow{E\Delta} = \overrightarrow{EA}$

18. Για τα σημεία Α, Β, Γ με $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BA} = 5\overrightarrow{A\Gamma}$, ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν και ποιες όχι;

i) Τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά σημεία.
ii) Τα Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.
iii) Τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$ είναι ομόρροπα.
ιv) Τα διανύσματα $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}$ είναι αντίρροπα.
v) $|\vec{AB}| = \frac{5}{2}|\vec{A\Gamma}|$.
vι) $\vec{B\Gamma} = \frac{7}{2}\vec{A\Gamma}$
vιι) $\vec{B\Gamma} + \frac{7}{5}\vec{AB} = \vec{0}$

19. Αν για τα σημεία Μ και Ν του επιπέδου τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν:

$$\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{5}{6}\vec{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \vec{AN} = \frac{5}{6}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{A\Gamma}$$

ποια από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύει και γιατί;

i) Τα σημεία Μ και Ν συμπίπτουν.
ii) Το διάνυσμα $\vec{MN}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{B\Gamma}$.
iii) $|\vec{AM} - \vec{AN}| = |\vec{B\Gamma}|$.

20. Αν ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο να βρείτε σημείο Ρ τέτοιο ώστε:

ι) $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{P\Gamma} = \vec{P\Delta}$ ιι) $\vec{A\Gamma} + \vec{\Delta B} = \vec{AB} + \vec{PB}$

21. Αν $|\vec{u}| = \frac{4}{3}$ και $|\vec{v}| = \frac{4}{6}$ και $|\vec{u} + \vec{v}| \geq 2$ να δείξετε ότι $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$.

22. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ, Η, Θ ώστε να είναι: $\vec{AE} = \vec{Z\Gamma}$ και $\vec{\Delta\Theta} = \vec{HB}$. Αποδείξτε ότι $\vec{\Theta Z} = \vec{EH}$.

23. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $|\vec{\gamma}| = 3$ να δείξετε ότι:

ι) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq 3$ ιι) $|\vec{\beta} - \vec{\gamma}| \geq 2$ ιιι) $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}| \leq 13$

24. Εστω $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{x}|}{5} = \frac{|\vec{y}|}{9} = \frac{|\vec{z}|}{4}$. Δείξτε ότι:

ι) $\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{z}$ ιι) $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y}$

25. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ και δύο σημεία Ζ και Ε τέτοια ώστε $\vec{BZ} = \vec{\Delta\Gamma}$ και $\vec{\Gamma E} = \vec{AB}$. Αποδείξτε ότι: $\vec{A\Delta} = \vec{ZE}$.

26. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Μ, Ν τέτοια ώστε να είναι: $\vec{\Delta M} = \vec{A\Delta}$ και $\vec{BN} = \vec{AB}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Γ και Ν είναι συνευθειακά.

27. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει : $\left|\overrightarrow{\text{Μ}\Delta}+\overrightarrow{\text{Β}\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{\text{ΜΑ}}\right|$

1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

28. Να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

ι) Αν $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ τότε $-\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}$ έχει μέτρο -1 Σ Λ

ιι) Αν $\vec{\alpha}=-2\vec{\beta}$ τότε $|\vec{\alpha}|=-2|\vec{\beta}|$ Σ Λ

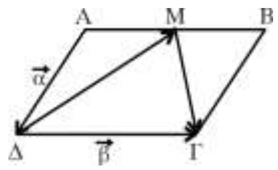
ιιι) Αν $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ τότε $-|\vec{\alpha}|\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$ είναι ομόρροπο με το $-\frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}$ Σ Λ

ιv) Αν το $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$, τότε το $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ Σ Λ

είναι συγγραμμικό του $\vec{\beta}$.

v) Τα διανύσματα $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\frac{\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|}$ έχουν ίσα μέτρα. Σ Λ

29. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ το Μ είναι μέσο της ΑΒ. Αν $\overrightarrow{\text{Α}\Delta}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\vec{\beta}$, τότε:



α) Το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta\text{Μ}}$ ισούται με:

Α. $\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}$ **Β.** $\frac{\vec{\beta}-\vec{\alpha}}{2}$ **Γ.** $-\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\beta}$ **Δ.** $\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\beta}$ **Ε.** $\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{\text{Μ}\Gamma}$ ισούται με:

Α. $\vec{\alpha}-\frac{1}{2}\vec{\beta}$ **Β.** $\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ **Γ.** $\frac{1}{2}\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ **Δ.** $\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\beta}$ **Ε.** $\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}$

γ) Με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα:

Α. $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$ **Β.** $\overrightarrow{\text{Β}\Delta}$ **Γ.** $\overrightarrow{\Delta\text{Β}}$ **Δ.** $\overrightarrow{\Gamma\text{Α}}$ **Ε.** $\overrightarrow{\text{Α}\Gamma}$

δ) Με $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα:

Α. $\overrightarrow{\text{Α}\Gamma}$ **Β.** $\overrightarrow{\Gamma\text{Α}}$ **Γ.** $\overrightarrow{\text{ΒΑ}}$ **Δ.** $\overrightarrow{\Delta\text{Β}}$ **Ε.** $\overrightarrow{\text{Β}\Delta}$

30. Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\kappa,\lambda\in R^*$ διάφοροι του ±1και $\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=\vec{0}$, τότε:

Α. κ,λ θετικοί Β. κ,λ αρνητικοί Γ. κ,λ αντίστροφοι

Δ. κ,λ ετερόσημοι Ε. κανένα από τα προηγούμενα.

31. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ.

ι) Να βρείτε τα σημεία Κ, για τα οποία ισχύει : $\overrightarrow{\text{ΚΑ}}-\overrightarrow{\text{ΚΒ}}+\overrightarrow{\text{Κ}\Gamma}=\vec{0}$.

ιι) Να βρείτε το γ.τ. των σημείων Μ του επιπέδου του τριγώνου ΑΒΓ, για τα οποία το διάνυσμα : $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι παράλληλο στο ΒΓ.

32. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ ώστε να ισχύει $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AZ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{B\Gamma}$.
α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. β) Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

33. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιοριστεί σημείο Ρ τέτοιο ώστε να ισχύει:
$\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{\Gamma P}$

34. Εστω τα διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta}$ και Ο τυχαίο σημείο του χώρου. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ που ορίζονται από τις ισότητες: $\overrightarrow{OA}=\vec{a}+\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB}=2\vec{a}+3\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=5\vec{a}+9\vec{\beta}$ είναι συνευθειακά.

35. Αν ισχύει $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 5\overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

36. Αν $\kappa\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, κ, $\lambda \in R$ και $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά, τότε λ = μ = 0.

37. Αν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, να αποδείξετε το ίδιο και για τα διανύσματα $\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$.

38. Αν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, να βρεθεί ο $\lambda\in R$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha}-(\lambda+1)\vec{\beta}$ να είναι παράλληλα.

39. Εστω τα διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ που δεν είναι παράλληλα ανά δύο. Αν $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}\,//\,\vec{\gamma}-\vec{\alpha}$ να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

40. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και (ΑΒ)=5, (ΓΔ)=7. Έστω σημείο Μ, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta},\lambda\in R$. Να βρεθεί ο λ, ώστε το Μ να είναι το συμμετρικό του Γ ως προς το Δ.

41. Αν $\overrightarrow{AB}=\lambda\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\lambda\in R$ και Γ δεν ταυτίζεται με το Δ, να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο είναι $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta B}=x\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

42. Στη διάμεσο ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Δ με $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$ και έστω Ε το σημείο τομής της ΒΔ με την ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{5}\overrightarrow{A\Gamma}$.

43. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ έχει το ίδιο βαρύκεντρο με το ΑΒΓ.

44. Αν $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ μη μηδενικά, να βρείτε το γ.τ. του Μ ώστε:

ι) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ ιι) $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB}$

45. Θεωρούμε τα διανύσματα: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}, \overrightarrow{A\Delta} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \overrightarrow{AE} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

α) Να γραφούν τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Delta}, \overrightarrow{\Gamma E}, \overrightarrow{\Delta E}$ ως γραμμικοί συνδυασμοί των $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$.

β) Αν Α΄ σημείο ώστε $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Gamma E} + \overrightarrow{\Delta E} - 5\overrightarrow{AB}$ να δείξετε ότι $\overrightarrow{AA'} // \overrightarrow{\Gamma E}$.

46. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ρ της ΒΓ. Αν $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{A\Gamma}$ δείξτε ότι x+y=1.

47. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία είναι :

$$\overrightarrow{AM} = (1-\lambda)\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{A\Gamma}, \quad \lambda > 0$$

1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

48. Να σημειώσετε το Σ(σωστή) ή το Λ(λανθασμένη) σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις :

ι) Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$ και σημείο Α τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, τότε το Α έχει συντεταγμένες (x,y). **Σ Λ**

ιι) Είναι $\det(\vec{\alpha}, \vec{\alpha})=0$. **Σ Λ**

ιιι) Είναι $\det(\vec{i}, \vec{j})=1$. **Σ Λ**

ιv) Αν η τεταγμένη του $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ είναι ίση με $\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|$, τότε η γωνία που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με τον άξονα x΄x είναι $\frac{\pi}{6}$. **Σ Λ**

v) Αν Α(2,1) και Β(10,7), τότε $\overrightarrow{AB} = -8\vec{i} - 6\vec{j}$. **Σ Λ**

49. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (λ^2, 2λ) και $\vec{\beta}$ = (1, - 2) είναι παράλληλα. Ο λ ισούται με:

Α. - 2 **Β.** - 1 **Γ.** $\sqrt{2}$ **Δ.** 1 **Ε.** 2

50. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (- 2, 4) και $\vec{\beta}$ = (3, - 2). Η σχέση $\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta} = \vec{0}$ ισχύει με:

Α. κ = $\frac{2}{3}$ **Β.** κ = - $\frac{2}{3}$ **Γ.** κ = - 2 **Δ.** κ = 2 **Ε.** κανένα κ $\in$ R

51. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ = (2, - $\sqrt{2}$). Παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι το:

Α. $\vec{x}$ = (- 2, $\sqrt{2}$) **Β.** $\vec{y}$ = ($\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$) **Γ.** $\vec{z}$ = (- $\sqrt{2}$, 2)

Δ. $\vec{\omega}$ = (1, - $\sqrt{2}$) **Ε.** $\vec{v}$ = ($\sqrt{2}$, - 2)

52. Θεωρούμε τα διανύσματα:

$\vec{\alpha} = (4\kappa^2 + \kappa - 2, 5\kappa^2 - \kappa + 1)$ και $\vec{\beta} = (\kappa^2 - \kappa - 1, 3\kappa^2 - 2\kappa + 2)$.

ι) Είναι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ για : α) κ= -1 β) κ=$\frac{1}{3}$

ιι) Είναι $\vec{\alpha}=-\vec{\beta}$ για : α) κ= $-\frac{1}{3}$ β) Για καμία τιμή του κ.

53. Θεωρούμε τα σημεία Α=(ασυνω, αημω), Β=(αημω, -ασυνω), με α>0. Να σημειωθεί η σωστή απάντηση :

α) $|\overrightarrow{AB}|=\alpha\sqrt{2}$ β) $|\overrightarrow{AB}|=\alpha$ γ) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$

54. Να σημειώσετε το γράμμα της σωστής απάντησης σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις.

ι) Οι συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου Α(-3,1) ως προς το Β(1,0) είναι:

Α: (5,1) Β: (3,-1) Γ: (-7,2) Δ: (5,-1)

ιι) Αν $\overrightarrow{AB}=\vec{a}=(-1,4)$ και Α(-1,4), τότε το Β είναι το σημείο:

Α: (0,0) Β: (-1,4) Γ: (0,8) Δ: (-2,8)

ιιι) Αν $\vec{\alpha}=\left(\frac{9}{2},4\right)$, $\vec{\beta}=\left(\frac{6}{5},y\right)$ και $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, τότε το y είναι ίσο με:

Α: $\frac{27}{20}$ Β: $-\frac{27}{20}$ Γ: $\frac{16}{15}$ Δ: $-\frac{16}{15}$

55. Να αντιστοιχιστεί κάθε ζεύγος σημείων της στήλης (Ι) στο αντίστοιχο στοιχείο της στήλης (ΙΙ).

Στήλη (Ι)	**Στήλη (ΙΙ)** **Συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$**
(α) Α(1,3), Β(-1,5)	(1) $\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$
(β) $A\left(1,\frac{1}{2}\right),B\left(\frac{1}{2},3\right)$	(2) (-2,2)
(γ) Α(-3,0), Β(0,1)	(3) (3,1)

Στήλη (Ι)	**Στήλη (ΙΙ)** **Απόσταση d(A,B)**
(α) Α(2,1), Β(-2,3)	(1) $\frac{\sqrt{82}}{3}$
(β) $A\left(\frac{1}{2}3\right),B(-1,4)$	(2) $\frac{\sqrt{13}}{2}$
(γ) $A\left(\frac{1}{3}4\right)$, Β(0,1)	(3) $\sqrt{20}$

56. Κάθε διάνυσμα της στήλης (Α) σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Οx γωνία θ, η οποία γράφεται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε διάνυσμα με την αντίστοιχη γωνία.

Στήλη Α **διάνυσμα $\vec{u}$**	**στήλη Β** **$(O\vec{x}, \vec{u})$**
$-3\vec{i} + 3\sqrt{3}\,\vec{j}$	$\frac{3\pi}{2}$
(1, 1)	$\frac{\pi}{3}$
$(1, \sqrt{3})$	$\frac{2\pi}{3}$
(- 1, 1)	$\frac{\pi}{4}$
	$\frac{5\pi}{6}$
	$\frac{\pi}{6}$

57. Αν $\vec{\alpha}$ = (2, 3), $\vec{\beta}$ = (- 1, 1) και $\vec{\gamma}$ = (- 2, 3) να υπολογιστούν τα:

α) $|\vec{a} - \vec{a} + \vec{a}|$ β) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| + |\vec{\beta} + \vec{\gamma}| + |\vec{\gamma} + \vec{\alpha}|$

58. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, -1)$ $\vec{\beta} = (1, -2)$ $\vec{\gamma} = (-1, 7)$. Να γράψετε το $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

59. Να αναλύσετε το $\vec{\alpha} = (4, 12)$ σε δύο συνιστώσες κατά την διεύθυνση των $\vec{\beta} = (-1, 0)$ και $\vec{\gamma} = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

60. Να βρεθεί ο ακέραιος x ώστε η απόσταση των σημείων Α(3x+1, 2) και Β(1, 4-5x) να είναι 10. Μετά να βρείτε σημείο του άξονα y΄y για το οποίο το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με κορυφή Γ.

61. Στο σύστημα αναφοράς Οxy θεωρούμε τα σημεία Α(3,2), Β(1,0) και Γ(0,4). Η ΑΓ τέμνει τον Οx στο Δ και η ΑΒ τον Oy΄ στο Ε.

ι) Να βρείτε την τετμημένη του Δ και την τεταγμένη του Ε.

ιι) Αν Ι το μέσο του ΟΑ, Μ το μέσο του ΒΓ και Κ το μέσο του ΕΔ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Ι, Μ και Κ είναι συνευθειακά.

62. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(-5,4) και Β(2,3) και το βαρύκεντρο $G\left(-2, \frac{5}{3}\right)$. Να βρείτε την κορυφή Γ του τριγώνου.

63. Να βρεθεί διάνυσμα με μέτρο 3 αντίρροπο στο $\vec{\alpha}$ =(2,-3).

64. Εστω τρίγωνο με κορυφές Α(0,2), Β(8,3) και Γ(3,4).

ι) Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$.

ιι) Να βρείτε τις συντεταγμένες του ίχνους Δ της διχοτόμου ΑΔ.

65. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy, δίνονται τα σημεία Α(λ,μ), Β(μ,-λ) και Γ(-μ,λ). Να δειχθεί ότι:

ι) Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΟΓ είναι ορθογώνια και ισοσκελή.

ιι) Τα διανύσματα $\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$ είναι αντίθετα.

ιιι) Το τρίγωνο ΒΑΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

66. Να εξετασθεί αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{\beta} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{\gamma} = -2\vec{i} - \vec{j}$ αποτελούν πλευρές τριγώνου.

67. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α(2,-5):

ι) ως προς τον άξονα x΄x

ιι) ως προς τον άξονα y΄y

ιιι) ως προς το (0,0)

ιv) ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο Β(1,2)

68. Εστω το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2+4\lambda-3,\ \lambda^2-1)$, όπου $\lambda \in R$.

ι) Να δείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in R$ ισχύει $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$.

ιι) Να βρείτε τους $\lambda \in R$, για τους οποίους ισχύει $\vec{a}\, //\, \vec{i} + \vec{j}$.

69. Να βρείτε τους $\lambda \in R$, για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1,\ \lambda-2)$ και $\vec{\beta} = (\lambda-1,\ \lambda-5)$ είναι ομόρροπα.

70. Θεωρούμε τα σημεία Α(-1,-5), Β(2,1) και Γ(1,5).

ι) Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο.

ιι) Να βρείτε την τέταρτη κορυφή του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ.

71. Δίνονται τα σημεία Α(1,1), Β(2,0), Γ(0, -4). Να βρείτε το σημείο Μ του επιπέδου για το οποίο τα άθροισμα $|\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 + |\overrightarrow{M\Gamma}|^2$ είναι ελάχιστο.

72. Να βρεθεί ο αριθμός λ για τον οποίο τα σημεία Α(λ+3, λ-4), Β(λ, λ-1) και Γ(2λ+3, 2-6λ) είναι συνευθειακά. Στη συνέχεια, να βρείτε τους αριθμούς x και y για τους οποίους είναι: $\overrightarrow{AB} = x \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = y \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$.

73. Αν $\vec{\alpha} = (2x - \psi,\ x + 2\psi - 4)$, $\vec{\beta} = (x - 3\psi + 2,\ -3x + 2\psi - 2)$ $\vec{\gamma} = (3,\ -2)$ και $\vec{\delta} = (-3,\ 4)$ τότε:

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες $(x_1,\ \psi_1)$ του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$

β) Να βρείτε τη σχέση ανάμεσα στα x και ψ ώστε $\vec{u}\, //\, \vec{\delta}$

γ) Να υπολογιστούν τα x και ψ αν είναι $\vec{u} = \vec{0}$

74. Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Οxψ θεωρούμε τα σημεία Α, Β του x΄x, τα οποία έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 - 5\lambda + 20)x - 2001 = 0$. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in R$ ώστε το μέσο του ΑΒ να έχει τετμημένη 7.

1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

75. Μπορούμε να γράφουμε: $\vec{\alpha}\,(\vec{\beta}\,.\,\vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta})\,\vec{\gamma}$. Σ Λ

76. Αν $\vec{\alpha} = (3, 5)$ και $\vec{\beta} = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{5})$ τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. Σ Λ

77. Αν $\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta} = 0$ τότε είναι πάντα $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{2}$. Σ Λ

78. Αν είναι $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) > \frac{\pi}{2}$, τότε $\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta} < 0$. Σ Λ

79. Αν $\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta} = \vec{\alpha}\,.\,\vec{\gamma}$ τότε είναι $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$. Σ Λ

80. Υπάρχουν $x \in R$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x + 1, 3)$ και $\vec{\beta} = (x, 1)$ να είναι κάθετα. Σ Λ

81. Ισχύει $\pi\rho o\beta_{x'x}\vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{i})\vec{i}$. Σ Λ

82. Αν $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{a} = \vec{a}$ τότε $\vec{a}\,//\,\vec{\beta}$. Σ Λ

83. Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα, η τιμή της παράστασης $\frac{|\vec{a}+\vec{\beta}|^2}{|\vec{a}|^2} - 2\frac{\vec{a}\cdot\vec{\beta}}{\vec{a}^2} - \left(\frac{a}{|\vec{a}|}\right)^2$ είναι:

Α. $\vec{\beta}^2$ Β. $\left(\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{a}|}\right)^2$ Γ. $\left(\frac{\vec{\beta}}{\vec{a}}\right)^2$ Δ. $1+\frac{|\vec{\beta}|^2}{|\vec{a}|^2}$

84. Κάθε διάνυσμα της στήλης (Α) είναι κάθετο με ένα διάνυσμα της στήλης (Β). Συνδέστε με μια γραμμή τα αντίστοιχα.

Στήλη Α **διάνυσμα**	**Στήλη Β** **κάθετο διάνυσμα**
$\vec{\alpha} = (2\kappa, 1)$	$\vec{e} = (0, \kappa)$
$\vec{\beta} = (\kappa, -1)$	$\vec{u} = (\frac{1}{\kappa}, 1)$
$\vec{\gamma} = (\kappa + 1, \kappa)$	$\vec{v} = (1, \frac{1}{\kappa})$
$\vec{\delta} = (0, \frac{1}{\kappa})$	$\vec{w} = (1, -2\kappa)$
	$\vec{r} = (\kappa, -\kappa - 1)$
	$\vec{m} = (\kappa^2, 0)$

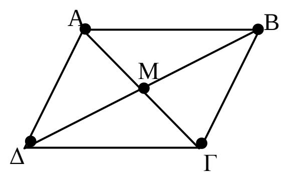
85. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 45^\circ$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta} - \vec{\alpha}, \vec{\alpha})$

86. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ να υπολογιστεί η γωνία των διανυσμάτων:
$\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

87. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο ώστε $\vec{x} // (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{x})$

88. Για το διπλανό σχήμα, να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:
ι) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = ...$
ιι) $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Delta} = ...$
ιιι) $\overrightarrow{AZ} \cdot \overrightarrow{BE} = ...$
Επίσης να εξηγήσετε τις ισότητες: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AB}^2$ και $\overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{A\Delta} = |\overrightarrow{AB}|^2$.

89. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες ισχύουν σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ;
ι) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{\Delta A} \cdot \overrightarrow{\Delta\Gamma}$
ιι) $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta}\right) \cdot \overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{A\Gamma}|^2$
ιιι) $\overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{A\Delta}^2 - \overrightarrow{AB}^2$.



90. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α=2 . Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:
ι) $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{A\Gamma}$ ιι) $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{B\Gamma}$ ιιι) $\overrightarrow{A\Delta}\overrightarrow{A\Gamma}$ ιν) $\overrightarrow{A\Gamma}\overrightarrow{\Delta A}$

91. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στο οποίο είναι $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι τέτοια ώστε να ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων του ΑΒΓΔ.

92. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$. Αν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ να βρεθούν:
α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ β) $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$ γ) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$ δ) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ ε) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$

93. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $|\vec{\gamma}| = 5$ υπολογίστε το: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$.

94. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 2$ και $\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} = 8$ δείξτε $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

95. Αν $0<(\vec{\alpha},\vec{\beta})<\pi$ δείξτε ότι: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|<|\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \Leftrightarrow (\vec{\alpha},\vec{\beta})>\frac{\pi}{2}$.

96. Να βρεθεί η προβολή του $\vec{\alpha}$=(2,1) πάνω στο $\vec{\beta}$=(3,4).

97. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB}=3\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=12\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$ όπου $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$.

ι) Να αποδείξετε ότι ΒΓ=9$\vec{a}-\vec{\beta}$ και να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.

ιι) Να βρείτε την διάμεσο ΑΜ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς επίσης και το μήκος της.

98. Αν $|\vec{\alpha}|$ = 2, $|\vec{\beta}|$ = $2\sqrt{2}$, ($\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$) = 45° να βρείτε τη γωνία ($\vec{\beta}$ - $\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha}$)

99. Αν $|\vec{\alpha}|$ = $|\vec{\beta}|$ = 1 και ($\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$) = $\frac{2\pi}{3}$ να υπολογιστεί η γωνία των διανυσμάτων:

$\vec{u}$ = 2$\vec{\alpha}$ + 4$\vec{\beta}$ και $\vec{v}$ = $\vec{\alpha}$ - $\vec{\beta}$

100. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με ($\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$) = $\frac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο ώστε $\vec{x}$ //($\vec{\alpha}$ + $\vec{\beta}$) και $\vec{\beta}$ ⊥ ($\vec{\alpha}$ + $\vec{x}$)

101. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (3, - 4) και $\vec{\beta}$ = (5, 10). Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\alpha}$.

102. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (1, 3), $\vec{\beta}$ = (3, - 1) και $\vec{\gamma}$ = (- 1, 0). Να βρείτε όλα τα διανύσματα $\vec{v}$ με $(\vec{v}($ = 10, $\vec{v}$ ⊥ $\vec{\gamma}$ και $\vec{v}$ = λ$\vec{\alpha}$ + μ$\vec{\beta}$, λ, μ ∈ R.

103. Αν $\vec{x}$ + ($\vec{x}\cdot\vec{\alpha}$)$\vec{\beta}$ = $\vec{\gamma}$ με 1 + $\vec{\alpha}$ $\vec{\beta}$ ≠ 0 να αποδείξετε ότι $\vec{x}\cdot\vec{\alpha}$ = $\frac{\vec{\alpha}.\vec{\gamma}}{1+\vec{\alpha}.\vec{\beta}}$

104. Αν $\vec{\alpha}$ = (1, 2) και $\vec{\beta}$ = (3, 4) να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως:

α) $\vec{\alpha}$ = $\vec{p}$ + $\vec{q}$ β) $\vec{p}$ // $\vec{\alpha}$ γ) $\vec{q}$ ⊥ $\vec{\beta}$

105. Αν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=1$, $|\vec{\gamma}|=2$ να υπολογιστεί η παράσταση $K=2\vec{\alpha}\vec{\beta}-3\vec{\alpha}\vec{\gamma}+\vec{\beta}\vec{\gamma}$

106. Τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν μέτρα 3 και 4 αντίστοιχα. Να βρείτε διάνυσμα γ με μέτρο 1 που διχοτομεί τη γωνία τους.

107. Αν ΑΔ είναι ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (γων.Α=90°), να αποδείξετε ότι:
$\left|\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right|^2 = \overrightarrow{\mathrm{B\Delta}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{\Delta\Gamma}}$

108. Εστω ΑΔ διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ. Αν ισχύει η ισότητα
$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

109. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε και Ζ για τα οποία ισχύει :
$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 3\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AZ}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ Ποια από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύει;

ι) $\overrightarrow{\mathrm{AZ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{9}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2$.

ιι) $\overrightarrow{\mathrm{\Gamma E}} = 3\overrightarrow{\mathrm{\Gamma Z}}$.

ιιι) $\overrightarrow{\mathrm{EZ}} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{\Gamma E}}$.

ιν) Τα σημεία Ε, Γ, Ζ σχηματίζουν αμβλεία γωνία.

110. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύουν οι σχέσεις $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{2}=\frac{|\vec{\beta}|}{3}=\frac{|\vec{\gamma}|}{5}$ να αποδειχθεί ότι: $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\downarrow\uparrow\vec{\gamma}$.

111. Αν $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$ να βρεθεί ο $\lambda\in R$ για τον οποίο ισχύει
$\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\left(\lambda\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=2\vec{\beta}$.

112. α) Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{x},\vec{y}$ διανύσματα του επιπέδου, με $\vec{\alpha}$ όχι παράλληλο $\vec{\beta}$ και είναι $\vec{x}\vec{\alpha}=\vec{y}\vec{\alpha}$ και $\vec{x}\vec{\beta}=\vec{y}\vec{\beta}$ να δείξετε ότι $\vec{x}=\vec{y}$.
β) Αν είναι $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{x}=\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{y}$ και $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{x}=\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{y}$ να δείξετε ότι θα είναι και $\vec{x}=\vec{y}$.

113. Εστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα.

ι) Αποδείξτε ότι : $\left|\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}\right|=\frac{|\vec{\alpha}\vec{\beta}|}{|\vec{\beta}|}=|\vec{\alpha}|\left|\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)\right|$

ιι) Αν $\left|\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}\right|=\left|\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}\right|$, τι συμπεραίνετε για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

114. Δίνονται τα σημεία Α και Β τέτοια ώστε: $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=4$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του Μ αν :

ι) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=1$ ιι) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=-1$ ιιι) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0$

115. Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ ισχύει: $|\vec{z}|\cdot\vec{x}\cdot\vec{y}+|\vec{x}|\cdot\vec{y}\cdot\vec{z}=2|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot|\vec{z}|$. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}=\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}=\frac{\vec{z}}{|\vec{z}|}$.

116. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=5$, $|\vec{\gamma}|=\sqrt{7}$ και $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=5\vec{\gamma}$.

ι) Να βρεθεί η γωνία $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$.

ιι) Αν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ έχουν κοινή αρχή να δειχθεί ότι τα πέρατά τους είναι σημεία συνευθειακά.

ιιι) Να βρεθεί ένα διάνυσμα $\vec{x}$ και το μέτρο του αν $\vec{x}\,//\,(3\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ και $(\vec{x}+\vec{\alpha})\perp\vec{\beta}$.

117. Δίνονται τα σημεία $A(-2,\sqrt{5})$, $B(2,\sqrt{5})$,

ι) Να βρεθούν σημεία Γ άξονα xx΄ ώστε $\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}=10$.

ιι) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα Α, Β, Γ, Γ΄ (όπου Γ, Γ΄ τα σημεία του ερωτήματος ι) είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

118. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\frac{1}{4}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{j}$, $\vec{\beta}=(4\sigma\upsilon\nu\theta)\vec{i}+(4\eta\mu\theta)\vec{j}$ και $\vec{\gamma}=2\vec{i}-2\vec{j}$.

Α) Να βρεθεί το $\theta\in(0,\pi)$, ώστε τα διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

Β) Αν η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι $\frac{3\pi}{4}$, να δειχθεί ότι: ημθ-1=συνθ.

Γ) Αν ο λόγος εσωτερικού γινομένου του $\vec{\beta}$ με το $\vec{\gamma}$ προς το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{\beta}$ με το $\vec{\alpha}$ είναι $\frac{8}{\sqrt{3}}$, να βρεθεί η γωνία των $\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}$.

119. α) Αν $\vec{\alpha}$=(4,-6), $\vec{\beta}$=(2x-2,-4) και $\vec{\gamma}$=(-2x, -2x-4), $x\neq\frac{1}{2}$ να βρεθεί ο $x\in R$ ώστε $\vec{\alpha}\perp(\vec{\beta}-\vec{\gamma})$.

β) Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα: $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$