

Η μέθοδος των οριζουσών (Cramer)

Σύστημα 2×2 με μοναδική λύση

Τι θα κάνουμε

- Θα λύσουμε ένα αριθμητικό σύστημα 2×2 με **μοναδική λύση**.
- Θα χρησιμοποιήσουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y .
- Θα εξηγήσουμε **γιατί** τελικά προκύπτει $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$.

Η ιδέα (σχετική θέση ευθειών)

Κάθε εξίσωση είναι ευθεία

Το σύστημα

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

αντιστοιχεί σε **δύο ευθείες**. Η λύση (αν υπάρχει μοναδική) είναι το **μοναδικό σημείο τομής**.

Ορίζουσα του συστήματος

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

- Αν $D \neq 0$: οι ευθείες **τέμνονται** $\Rightarrow$ **μοναδική λύση**.
- Αν $D = 0$: **παράλληλες ή ταυτιζόμενες** $\Rightarrow$ **όχι μοναδική λύση**.

Εναλλακτική προσέγγιση (παράλληλα διανύσματα)

Παράλληλο διάνυσμα

Για την ευθεία $Ax + By = C$, ένα παράλληλο διάνυσμα είναι

$$\vec{\delta} = (B, -A).$$

Κριτήριο

Οι ευθείες **δεν** είναι παράλληλες όταν τα $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2$ **δεν** είναι συγγραμμικά, δηλαδή

$$\det(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) \neq 0.$$

Στο 2×2 αυτό ισοδυναμεί με $D \neq 0$.

Αριθμητικό παράδειγμα

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 3y = 4 \end{cases}$$

Βήμα 1: Υπολογισμός D

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 1 = 6 + 1 = 7 \neq 0.$$

Άρα υπάρχει **μοναδική λύση**.

Οι ορίζουσες D_x και D_y

Ορισμοί

$$D_x = \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Στο παράδειγμά μας

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 15 - 4 = 11,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 5 = 8 + 5 = 13.$$

Γιατί προκύπτει το «κλάσμα των οριζουσών»;

Για το x (απαλοιφή του y)

Πολλαπλασιάζουμε την 1η εξίσωση με 3 και τη 2η με 1:

$$\begin{cases} 6x + 3y = 15 \\ -x + 3y = 4 \end{cases}$$

Αφαιρούμε: $(6x + 3y) - (-x + 3y) = 15 - 4 \Rightarrow 7x = 11$.

Συμπέρασμα

$$\underbrace{7}_D x = \underbrace{11}_{D_x} \Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{11}{7}.$$

Το ίδιο για το y

Για το y (απαλοιφή του x)

Πολλαπλασιάζουμε την 1η εξίσωση με 1 και τη 2η με 2:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -2x + 6y = 8 \end{cases}$$

Προσθέτουμε: $(2x + y) + (-2x + 6y) = 5 + 8 \Rightarrow 7y = 13$.

Συμπέρασμα

$$\underbrace{7}_D y = \underbrace{13}_{D_y} \Rightarrow y = \frac{D_y}{D} = \frac{13}{7}.$$

Τελικό αποτέλεσμα

Λύση

$$(x, y) = \left(\frac{11}{7}, \frac{13}{7} \right).$$

Πρακτική ανάγνωση

Το $D \neq 0$ σημαίνει «**μία τομή**» $\Rightarrow$ «**μία λύση**».

Και οι απαλοιφές δείχνουν ότι προκύπτουν οι σχέσεις $Dx = D_x$, $Dy = D_y$.

Κανόνας Cramer (ορίζουσες) για σύστημα 2×2

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases} \quad D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Περίπτωση	Τι συμβαίνει στο σύστημα	Συμπέρασμα
$D \neq 0$	Οι ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο.	Μοναδική λύση: $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}.$
$D = 0$ και $\{D_x \neq 0 \text{ ή } D_y \neq 0\}$	Αδύνατο.	Καμία λύση.
$D = 0$ και $D_x = 0$ και $D_y = 0$	Οι εξισώσεις είναι εξαρτημένες (ίδια ευθεία).	Άπειρες λύσεις.

Σημ.: Στην πράξη, για $D = 0$ αρκεί να ελέγξουμε αν *τουλάχιστον μία* από τις D_x, D_y είναι $\neq 0$ (τότε καμία λύση), αλλιώς άπειρες λύσεις.