3ο Γυμνάσιο Νεάπολης

Οι πραγματικοί αριθμοί

Φυσικοί αριθμοί (Συμβολισμός ℕ)

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...}

Ακέραιοι αριθμοί (Συμβολισμός ℤ)

{..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}

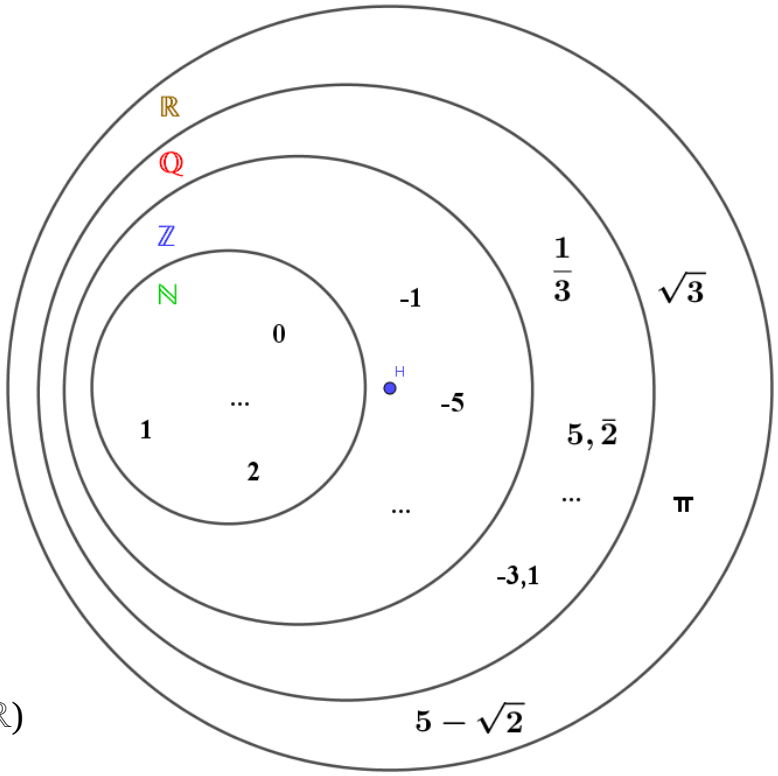
Ρητοί αριθμοί (Συμβολισμός ℚ)

{κλάσματα, δεκαδικοί και περιοδικοί}

Άρρητοι αριθμοί *{όχι κλάσματα}*

Πραγματικοί αριθμοί (Συμβολισμός ℝ)

{ℚ + Α, όπου Α οι άρρητοι αριθμοί}



Σχέση εγκλεισμού συνόλων

Πράξεις πραγματικών αριθμών

Πρόσθεση πραγματικών αριθμών

Διακρίνω τις εξής περιπτώσεις:

α) Όταν οι αριθμοί είναι **ομόσημοι**, βάζω το κοινό τους πρόσημο και προσθέτω τις απόλυτες τιμές τους.
π.χ. +2+3=+5 και –2–3=–5

β) Όταν οι αριθμοί είναι **ετερόσημοι**, βάζω το πρόσημο της μεγαλύτερης απόλυτης τιμής και αφαιρώ τις απόλυτες τιμές τους.
π.χ. +2–3=–1 και –2+3=+1

Αφαίρεση πραγματικών αριθμών

Μετατρέπω την αφαίρεση σε πρόσθεση σύμφωνα με τη σχέση **α–β=α+(–β)** και ακολουθώ τους κανόνες της πρόσθεσης.
π.χ. +2–(–3)=+2+3=+5

Αντίθετοι λέγονται οι αριθμοί είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή. Οι αντίθετοι έχουν άθροισμα 0.

π.χ. +2 και –2 είναι αντίθετοι. Ισχύει: +2–2=0

Β. Λαλακίδου

Σημείωση: Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού λέγεται η απόσταση του αριθμού από το 0 και κατά συνέπεια είναι πάντα θετικός αριθμός.

π.χ. $|-3|=3$ και $|+3|=3$

Πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών

Διακρίνω τις εξής περιπτώσεις:

α) Όταν οι αριθμοί είναι **ομόσημοι**, βάζω το πρόσημο (+) και πολλαπλασιάζω τις απόλυτες τιμές τους.
π.χ. $(+2)(+3)=+6$ και $(-2)(-3)=+6$

β) Όταν οι αριθμοί είναι **ετερόσημοι**, βάζω το πρόσημο (–) και πολλαπλασιάζω τις απόλυτες τιμές τους.
π.χ. $(+2)(-3)=-6$ και $(-2)(+3)=-6$

Αντίστροφοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν γινόμενο ίσο με τη μονάδα.

π.χ. -5 και $-\frac{1}{5}$ είναι αντίστροφοι. Ισχύει: $(-5)\left(-\frac{1}{5}\right)=1$

Γινόμενο πολλών παραγόντων

Διακρίνω τις εξής περιπτώσεις:

α) Όταν οι παράγοντες είναι θετικοί αριθμοί βάζω το πρόσημο (+) και πολλαπλασιάζω τις απόλυτες τιμές τους.
π.χ. $(+1)(+2)(+3)(+4)=+24$

β) Όταν υπάρχει έστω κι ένας αρνητικός παράγοντας, μετράω το πλήθος των αρνητικών παραγόντων και αν αυτό είναι:

β_1) άρτιο (ζυγός αριθμός), βάζω πρόσημο (+) και πολλαπλασιάζω τις απόλυτες τιμές τους.
π.χ. $(+1)(-2)(-3)(+4)=+24$

β_2) περιττό (μονός αριθμός), βάζω πρόσημο (–) και πολλαπλασιάζω τις απόλυτες τιμές τους.
π.χ. $(-1)(-2)(-3)(+4)=-24$

Διαίρεση πραγματικών αριθμών

Διακρίνω τις εξής περιπτώσεις:

α) Όταν οι αριθμοί είναι **ομόσημοι**, βάζω το πρόσημο (+) και διαιρώ τις απόλυτες τιμές τους.
π.χ. $(+12):(+3)=+4$ και $(-12):(-3)=+4$

β) Όταν οι αριθμοί είναι **ετερόσημοι**, βάζω το πρόσημο (–) και διαιρώ τις απόλυτες τιμές τους.
π.χ. (+12):(–3)=–4 και (–12):(+3)= –4

Δυνάμεις πραγματικών αριθμών με εκθέτη ν φυσικό αριθμό με ν>1

$$\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu \text{ φορές}}$$

Για δύναμη α^{ν} με α πραγματικό αριθμό και εκθέτη φυσικό αριθμό ν>1 διακρίνω τις εξής περιπτώσεις:

α) Όταν α>0, τότε $\alpha^{\nu}>0$
π.χ. $2^5=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32$

β) Όταν α<0, τότε:

β_1) για ν άρτιο, $\alpha^{\nu}>0$.
π.χ. $(-2)^4=+16$, αφού $(-2)^4=(-2)(-2)(-2)(-2)=+16$ ως γινόμενο πολλών παραγόντων.
β_2) για ν περιττό, $\alpha^{\nu}<0$.
π.χ. $(-2)^3=-8$, αφού $(-2)^3=(-2)(-2)(-2)=-8$ ως γινόμενο πολλών παραγόντων.

Προσοχή! $(-3)^4=+81$, αφού $(-3)^4=(-3)(-3)(-3)(-3)=+81$
αλλά $-3^4=-81$, αφού $-3^4=-3\cdot3\cdot3\cdot3=-81$

Ιδιότητες πραγματικών αριθμών με εκθέτη φυσικό αριθμό

α) $\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$
π.χ. $(-3)^4\cdot(-3)^2=(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)=(-3)^6$

β) $\alpha^{\mu}:\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$
π.χ. $(-3)^4:(-3)^2=\frac{(-3)(-3)\cancel{(-3)}\cancel{(-3)}}{\cancel{(-3)}\cancel{(-3)}}=(-3)^2$

γ) $(\alpha\cdot\beta)^{\nu}=\alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}$
π.χ. $(2\cdot3)^5=(2\cdot3)(2\cdot3)(2\cdot3)(2\cdot3)(2\cdot3)=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=2^5\cdot3^5$

δ) $(\alpha:\beta)^{\nu}=\alpha^{\nu}:\beta^{\nu}$
π.χ. $(2:3)^3=(\frac{2}{3})^3=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot3}=\frac{2^3}{3^3}$

ε) $(\alpha^{\mu})^{\nu}=\alpha^{\mu\cdot\nu}$
π.χ. $(2^4)^3=2^4\cdot2^4\cdot2^4=2^{4+4+4}=2^{4\cdot3}$

Δυνάμεις πραγματικών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

Για $\alpha \neq 0$, ισχύει: $\alpha^0=1$

Ακόμη ισχύουν: $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$ και $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

Τετραγωγική ρίζα πραγματικού αριθμού

Η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ και είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό x.

Ισχύουν: α) $\sqrt{x^2} = |x|$ και β) $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, όταν $x \geq 0$

Αριθμητική παράσταση

Λέγεται κάθε μαθηματική έκφραση με πράξεις μεταξύ αριθμών, πχ $3 \cdot 5^2 - 12$

Αλγεβρική παράσταση

Λέγεται κάθε μαθηματική έκφραση με πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών, πχ $3x+3y$

Ακέραια αλγεβρική παράσταση

Λέγεται κάθε αλγεβρική παράσταση με πράξεις μόνο πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού μεταξύ των μεταβλητών και εκθέτες των μεταβλητών φυσικούς αριθμούς, πχ $3x+3y$ ακέραια, αλλά $\frac{3}{x}$ όχι.

Μονώνυμο

Λέγεται κάθε ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ των μεταβλητών, πχ $3xyw$.



Βαθμός μονωνύμου (deg)

Λέγεται η μεγαλύτερη δύναμη στην οποία εμφανίζεται κάθε μεταβλητή, πχ στο μονώνυμο $3x^2y$ ο βαθμός ως προς x είναι 2 και ως προς y 1, ενώ ως προς x και y είναι 2+1=3

Όλοι οι αριθμοί λέγονται **σταθερά μονώνυμα** έχουν βαθμό 0, εκτός από τον αριθμό 0 που λέγεται **μηδενικό μονώνυμο** και δεν έχει βαθμό.

Όμοια μονώνυμα

Τα μονώνυμα με το ίδιο κύριο μέρος, πχ 3x και -5x.

Ίσα μονώνυμα

Τα μονώνυμα που έχουν ίδιο συντελεστή και ίδιο κύριο μέρος, πχ 3x και 3x.

Αντίθετα μονώνυμα

Τα μονώνυμα που έχουν αντίθετο συντελεστή και ίδιο κύριο μέρος, πχ 3x και -3x. Τα αντίθετα μονώνυμα έχουν άθροισμα 0.

Πράξεις μονωνύμων

Πρόσθεση και Αφαίρεση μονωνύμων

Το άθροισμα/Η διαφορά **όμοιων** μονωνύμων είναι όμοιο μονώνυμο, πχ 2x+3x=5x

Πολλαπλασιασμός μονωνύμων

Το γινόμενο μονωνύμων έχει συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της, πχ $(-3\alpha\beta)(-2\alpha^2\beta^3)=6\alpha^3\beta^4$.

Διαίρεση μονωνύμων

Η διαίρεση μονωνύμων γίνεται με τη βοήθεια των κλασμάτων και των ιδιοτήτων των δυνάμεων.

Πχ $-15x^3y^3:(3x^2y^4)=\frac{-15x^3y^3}{3x^2y^4}=\frac{-15}{3}\frac{x^3}{x^2}\frac{y^3}{y^4}=\frac{-5x}{y}$

Πολυώνυμα

Λέγονται το άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια, πχ $5x^2+y^2$

Όλα τα μονώνυμα που περιέχει ένα πολυώνυμο λέγονται όροι του πολυωνύμου· για δύο όρους λέγεται διώνυμο, για τρεις τριώνυμο.

Βαθμός πολυωνύμου

Ο μεγαλύτερος βαθμός ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του.

Πολυώνυμα με μία μεταβλητή

Συνήθως συμβολίζονται P(x), Q(x), κοκ

Γράφονται σε φθίνουσα σειρά των δυνάμεων, πχ $P(x)=x^4-3x^3+1$ (βαθμός 4)

Πράξεις με πολυώνυμα

Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων

Χρησιμοποιούμε την αναγωγή ομοίων όρων. Το νέο πολυώνυμο έχει βαθμό τον μέγιστο βαθμό των δύο πολυωνύμων.

Πχ $(x^2-3x+1)+(-2x^2+3x+1)= x^2-3x+1-2x^2+3x+1=-x^2+2$

Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα και στη συνέχεια την αναγωγή ομοίων όρων. Το νέο πολυώνυμο έχει βαθμό το άθροισμα των βαθμών των δύο πολυωνύμων.

Πχ $(2x^2-5)(-3x+2)=-6x^3+4x^2+15x-10$