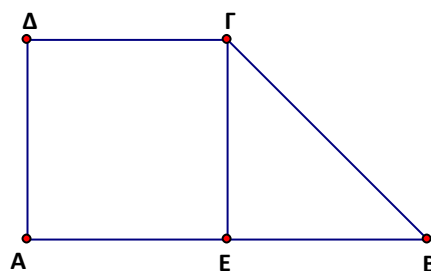


Τάξη: Β_{ΘΕΤ. ΣΠ.}

1. Δίνεται το δισορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ για το οποίο ισχύει $AB = 4$, $AD = \Gamma\Delta = 2$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD}, \vec{AB} \cdot \vec{\Delta\Gamma}, \vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta}, \vec{AD} \cdot \vec{B\Gamma}, \vec{AB} \cdot \vec{B\Gamma}$$



2. Α. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$

Να διατάξετε από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο τους αριθμούς.

$$2\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2, (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2, |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|.$$

- Β. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.

Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα των παρακάτω παραστάσεων.

i) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ii) $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$ iii) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

iv) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$ v) $(3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$

3. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $(AB) = (AG) = 8$ και $\hat{A} = 120^\circ$, ΑΔ είναι το ύψος από τη κορυφή Α. Να υπολογίσετε τα παρακάτω εσωτερικά γινόμενα $\vec{AD} \cdot \vec{B\Gamma}$, $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma}$, $\vec{AD} \cdot \vec{A\Gamma}$, $\vec{AB} \cdot \vec{B\Gamma}$.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -2)$ και $\vec{\beta} = (x, 1)$ και $\vec{\gamma} = (2, -1)$, όπου $x \in \mathbb{Z}$. Αν για την γωνία ϕ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $\cos \phi = \frac{\sqrt{5}}{5}$ να βρεθεί:

α) Η τιμή του $x \in \mathbb{Z}$.

β) Η γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

5. Αν για τα κάθετα μεταξύ τους διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ να αποδείξετε ότι και τα διανύσματα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ έχουν ίσα μέτρα και είναι κάθετα μεταξύ τους.

6. Αν για τα μοναδιαία μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $(\vec{a} + \vec{\beta}, \vec{a}) = 45^\circ$ να αποδειχθεί ότι $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 90^\circ$.

7. Έστω τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$, και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 120^\circ$.

Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $(2\vec{a} + \vec{\beta}, 2\vec{a})$.

8. Δίνεται τρίγωνο OAB στο οποίο ισχύει $|\vec{OA}| = 2$, $|\vec{OB}| = 4$ και $(\vec{OA}, \vec{OB}) = 60^\circ$.

Αν M είναι το μέσο της πλευράς AB να υπολογίσετε τη γωνία των $(\vec{OA}, \vec{OM})$.

9. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (5, 2)$, $\vec{\beta} = (7, -3)$.

Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ ώστε $\vec{\alpha} \cdot \vec{x} = 38$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{x} = 30$.

10.

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (2, 1)$

Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$ έτσι ώστε να ισχύουν οι συνθήκες.

α) $\vec{x} \parallel \vec{\alpha}$ και β) $\vec{x} \cdot \vec{\alpha} = 500$

11. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει η διανυσματική σχέση

$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{4}$ τότε να αποδείξετε ότι

α) $\vec{\beta} = 3\vec{\alpha}$ και β) $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$.

12. Αν ισχύει η σχέση $\vec{x} + \left(\vec{x} \cdot \vec{a} \right) \cdot \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ με $1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \neq 0$ να αποδείξετε ότι:

α) $\vec{x} \cdot \vec{\alpha} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}}{1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}$ και β) $\vec{x} = \vec{\gamma} - \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}}{1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} \cdot \vec{\beta}$

13. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\beta} = (2, 4)$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η μία έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{a} = (3, 1)$
(Θέμα πανελλαδικών εξετάσεων έτους 2000).

14. Αν $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 135^\circ$.

Να εκφραστεί το διάνυσμα $\vec{x}$ σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}, \vec{\beta}$ όταν ισχύουν οι σχέσεις: $\vec{x} \cdot \vec{a} = 4$ και $\vec{x} \cdot \vec{\beta} = -5$.

15. α) Να αποδείξετε ότι $|\vec{a} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{a} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2$.

β) i) Αν $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $|\vec{a} + \vec{\beta}| = \sqrt{3}$, να βρείτε το $|\vec{a} - \vec{\beta}|$

ii) Αν $1 \leq |\vec{a}| \leq 2$, $1 \leq |\vec{\beta}| \leq 2$ και $|\vec{a} - \vec{\beta}| = 1$ να δείξετε ότι $\sqrt{3} \leq |\vec{a} + \vec{\beta}| \leq \sqrt{15}$

iii) Αν $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| = |\vec{\beta}|$ να δείξετε ότι $|\vec{a} - \vec{\beta}| = \sqrt{3}|\vec{a}|$