Ονοματεπώνυμο: **Τμήμα:**

Ημερομηνία: **Βαθμός:**

Θέμα 1ο

Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας δίπλα τους το γράμμα **Σ** αν είναι Σωστές ή το γράμμα **Λ** αν είναι λανθασμένες.

α) Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ τότε αναγκαστικά θα είναι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

β) Αν Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, τότε $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$.

γ) Αν λ αρνητικός πραγματικός αριθμός, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}\ \kappa\alpha\iota - \lambda\vec{\alpha}$ είναι αντίρροπα.

δ) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει πάντοτε $\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| \leq |\vec{\alpha}| + \left|\vec{\beta}\right|$.

ε) Αν για τα μη μηδενικά και μη παράλληλα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{OB} = \vec{\beta},\ \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και γνωρίζουμε ότι $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 5)

Θέμα 2ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Η πάνω στις πλευρές του ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα έτσι ώστε να ισχύει 3(ΒΔ)=(ΒΓ) και 4(ΑΗ)=(ΑΓ). Θεωρούμε και το μέσο Ζ του τμήματος ΑΔ.

Α) Να αποδειχτεί ότι $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$.

Β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{BZ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$.

Γ) Να αποδειχτεί ότι τα σημεία Β, Ζ, Η είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 3+3+2=8)

Θέμα 3ο

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$. Να αποδειχτεί ότι:

Α) Τα διανύσματα $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι αντίρροπα, ενώ τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$ είναι ίσα.

Β) Για τους πραγματικούς αριθμούς χ,ψ,ω ισχύει $\left|\chi\vec{\alpha} + \psi\vec{\beta} + \omega\vec{\gamma}\right| = 0$ αν και μόνο αν οι αριθμοί χ,ψ,ω αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, δηλαδή αν και μόνο αν 2ψ=χ+ω.

(Μονάδες 4+3=7)

Ονοματεπώνυμο: **Τμήμα:**

Ημερομηνία: **Βαθμός:**

Θέμα 1ο

Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας δίπλα τους το γράμμα **Σ** αν είναι Σωστές ή το γράμμα **Λ** αν είναι λανθασμένες.

α) Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ τότε αναγκαστικά θα είναι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$.

β) Αν Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, τότε $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$.

γ) Αν λ αρνητικός πραγματικός αριθμός, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}\ \kappa\alpha\iota - \lambda\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπα.

δ) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει πάντοτε $\left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| \leq |\vec{\alpha}| - \left|\vec{\beta}\right|$.

ε) Αν για τα μη μηδενικά και μη παράλληλα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{OB} = \vec{\beta},\ \ \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και γνωρίζουμε ότι $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right| = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$, τότε το τετράπλευρο ΟΑΓΒ είναι πάντοτε τετράγωνο.

(Μονάδες 5)

Θέμα 2ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Η πάνω στις πλευρές του ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα έτσι ώστε να ισχύει 3(ΓΔ)=(ΒΓ) και 4(ΑΗ)=(ΑΒ). Θεωρούμε και το μέσο Ζ του τμήματος ΑΔ.

Α) Να αποδειχτεί ότι $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$.

Β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma Z}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$.

Γ) Να αποδειχτεί ότι τα σημεία Γ, Ζ, Η είναι συνευθειακά.

(**Μονάδες 3+3+2=8)**

Θέμα 3ο

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 5\vec{\gamma} = \vec{0}$. Να αποδειχτεί ότι:

Α) Τα διανύσματα $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι αντίρροπα, ενώ τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$ είναι ίσα.

Β) Για τους πραγματικούς αριθμούς χ,ψ,ω ισχύει $\left|\chi\vec{\alpha} + \psi\vec{\beta} + \omega\vec{\gamma}\right| = 0$ αν και μόνο αν οι αριθμοί χ,ψ,ω αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, δηλαδή αν και μόνο αν 2ψ=χ+ω.

(Μονάδες 4+3=7)

Ονοματεπώνυμο: **Τμήμα:**

Ημερομηνία: **Βαθμός:**

Θέμα 1^{ο}

Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας δίπλα τους το γράμμα **Σ** αν είναι Σωστές ή το γράμμα **Λ** αν είναι λανθασμένες.

α) Αν ισχύει $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ τότε το σημείο Μ είναι το μέσο του ευθ. τμήματος ΑΒ.

β) Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$ τότε αναγκαστικά τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

γ) Αν λ αρνητικός πραγματικός αριθμός, τότε $|\lambda\vec{\alpha}| = -\lambda|\vec{\alpha}|$.

δ) Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει πάντοτε $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \geq |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|$.

ε) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά και κ$\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ τότε αναγκαστικά κ=λ=0.

(Μονάδες 5)

Θέμα 2^{ο}

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Αν για δυο σημεία Κ και Λ ισχύει ότι $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Lambda} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι:

Α) $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$ $\kappa\alpha\iota$ $\overrightarrow{K\Lambda} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$

Β) Τα σημεία Κ, Μ και Λ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 4+4=8)

Θέμα 3^{ο}

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ $\kappa\alpha\iota$ $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$.

Αν ισχύει η σχέση $\overrightarrow{AE} = \kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ με $\kappa \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

Α) Για κάθε πραγματικό αριθμό κ, τα σημεία Γ,Δ, Ε είναι συνευθειακά.

Β) Να βρείτε την τιμή του κ για την οποία το σημείο Γ είναι το μέσον του ΔΕ.

(Μονάδες 4+3=7)

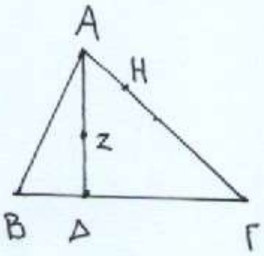
Ενδεικτικές απαντήσεις στα διαγωνίσματα

ομάδα 1η

Θέμα 1ο

α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

Θέμα 2ο



A) $3(B\Delta) = (B\Gamma) \Rightarrow$

$3\vec{B\Delta} = \vec{B\Gamma} \Leftrightarrow$

$3(\vec{A\Delta} - \vec{AB}) = \vec{A\Gamma} - \vec{AB} \Leftrightarrow$

$3\vec{A\Delta} - 3\vec{AB} = \vec{A\Gamma} - \vec{AB} \Leftrightarrow$

$3\vec{A\Delta} = 2\vec{AB} + \vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \vec{A\Delta} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{A\Gamma}.$

B) $\vec{BZ} = \vec{BA} + \vec{AZ} = -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{A\Delta} = -\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{A\Gamma} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{A\Gamma}$

Γ) $\vec{BH} = \vec{BA} + \vec{AH} = -\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{A\Gamma}$

Παρατηρούμε ότι $\vec{BZ} = \frac{2}{3}\vec{BH}$, άρα $\vec{BZ} \parallel \vec{BH}$ οπότε τα σημεία B, Z, H είναι συνευθειακά.

Θέμα 3ο

A) $\left.\begin{array}{l} \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \\ \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma} = \vec{0} \end{array}\right\} \overset{(-)}{\Rightarrow} \vec{\beta} + 2\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\beta} = -2\vec{\gamma}$ άρα $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$

Επίσης $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} - 2\vec{\gamma} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\gamma}.$

B) $|x\vec{\alpha} + y\vec{\beta} + w\vec{\gamma}| = 0 \Leftrightarrow x\vec{\alpha} + y\vec{\beta} + w\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$x\cdot\vec{\gamma} - 2y\vec{\gamma} + w\cdot\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow (x - 2y + w)\cdot\vec{\gamma} = \vec{0}.$

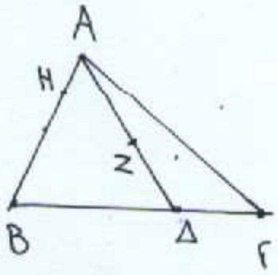
Αφού $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$ θα πρέπει $x - 2y + w = 0 \Leftrightarrow x + w = 2y.$

Ομάδα 2η

Θέμα 1ο

α) Λ , β) Λ , γ) Σ , δ) Λ , ε) Λ

Θέμα 2ο



A) $3(\Gamma\Delta) = (B\Gamma) \Rightarrow$

$3\vec{\Gamma\Delta} = \vec{\Gamma B} \Leftrightarrow$

$3(\vec{A\Delta} - \vec{A\Gamma}) = \vec{AB} - \vec{A\Gamma} \Leftrightarrow$

$3\vec{A\Delta} - 3\vec{A\Gamma} = \vec{AB} - \vec{A\Gamma} \Leftrightarrow$

$3\vec{A\Delta} = \vec{AB} + 2\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \vec{A\Delta} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{A\Gamma}$.

B) $\vec{\Gamma Z} = \vec{\Gamma A} + \vec{AZ} = -\vec{A\Gamma} + \frac{1}{2}\vec{A\Delta} = -\vec{A\Gamma} + \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{A\Gamma} = \frac{1}{6}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{A\Gamma}$

Γ) $\vec{\Gamma H} = \vec{\Gamma A} + \vec{AH} = -\vec{A\Gamma} + \frac{1}{4}\vec{AB}$

Παρατηρούμε ότι $\vec{\Gamma Z} = \frac{2}{3}\vec{\Gamma H}$ άρα $\vec{\Gamma Z} \parallel \vec{\Gamma H}$, συνεπώς τα σημεία Γ, Ζ, Η είναι συνευθειακά.

Θέμα 3ο

A) $\left.\begin{array}{l} \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \\ \vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 5\vec{\gamma} = \vec{0} \end{array}\right\} \xRightarrow{(-)} 2\vec{\beta} + 4\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\beta} = -2\vec{\gamma}$ άρα $\vec{\beta} \parallel \vec{\gamma}$

$\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} - 2\vec{\gamma} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\gamma}$.

B) $|x\vec{\alpha} + y\vec{\beta} + w\vec{\gamma}| = 0 \Leftrightarrow x\vec{\alpha} + y\vec{\beta} + w\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$x\vec{\gamma} - y2\vec{\gamma} + w\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$(x - 2y + w)\vec{\gamma} = \vec{0}$

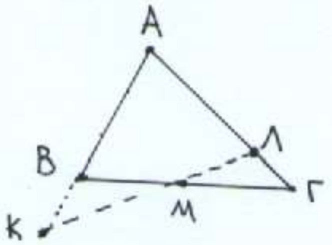
Αφού $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$ θα πρέπει $x - 2y + w = 0 \Leftrightarrow x + w = 2y$.

Ομάδα 3η

Θέμα 1ο

α. Λ β. Λ γ. Σ δ. Σ ε. Σ

Θέμα 2ο

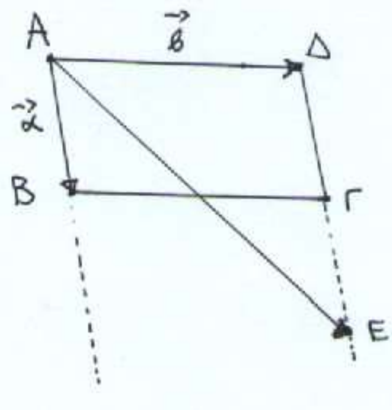


A) $\vec{MK}=\vec{AK}-\vec{AM}=\frac{3}{2}\vec{AB}-\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{A\Gamma})=\vec{AB}-\frac{1}{2}\vec{A\Gamma}$.

$\vec{K\Lambda}=\vec{KA}+\vec{A\Lambda}=-\frac{3}{2}\vec{AB}+\frac{3}{4}\vec{A\Gamma}$

B) Παρατηρούμε ότι $\vec{K\Lambda}=-\frac{3}{2}\vec{MK}$.
Άρα $\vec{K\Lambda}\,//\,\vec{MK}$ κι έτσι τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι συνευθειακά.

Θέμα 3ο



A) Είναι $\vec{\Delta\Gamma}=\vec{AB}=\vec{\alpha}$

$\vec{\Delta E}=\vec{AE}-\vec{A\Delta}=\kappa\cdot\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\beta}=\kappa\cdot\vec{\alpha}$

Δηλαδή

$\vec{\Delta E}=\kappa\cdot\vec{\Delta\Gamma}$ οπότε $\vec{\Delta E}\,//\,\vec{\Delta\Gamma}$

κι έτσι τα σημεία Δ, Ε, Γ θα είναι συνευθειακά.

B) Αν Γ μέσο του ΔΕ, τότε $\vec{\Delta E}=2\cdot\vec{\Delta\Gamma}$.
Αφού όμως $\vec{\Delta E}=\kappa\cdot\vec{\Delta\Gamma}$ θα πρέπει $2\cdot\vec{\Delta\Gamma}=\kappa\cdot\vec{\Delta\Gamma}$ και αφού $\vec{\Delta\Gamma}\neq\vec{0}$ θα είναι $\kappa=2$.