

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση 1-1, να δώσετε τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης της f .

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής.

A3. Να αποδείξετε ότι αν $P(x)$ είναι πολυώνυμο με

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \text{ και } x_0 \in \mathbb{R}. \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

A4.

*Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν η συνάρτηση f είναι 1-1 τότε είναι και γνησίως μονότονη.

β) Αν τα όρια των συναρτήσεων f, g υπάρχουν στο x_0 τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

δ) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 1$.

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ και η συνάρτηση $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Μονάδες 6

B2. Αν $h(x) = (x - 1)^2$, $x \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "1-1" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6).

Μονάδες 9

B3. Έστω $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση: } \varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}.$$

- i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $[\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) - \varphi(1)] \cdot e^{2022}$
ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης φ . (Μονάδες 4+6=10)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x < 0 \\ x^2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

- α. Να γίνει η γραφική παράσταση της f .
β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης.
γ. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .
δ. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -2} [f(x) + f^{-1}(x)]$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + f^{-1}(x)], \quad \lim_{x \rightarrow -1/2} [f(x) + f^{-1}(x)].$$

(Μονάδες 4+6+5+10)

ΘΕΜΑ Δ

α. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = 3$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

β. Έστω η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xg(x) + 1 \leq \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \ell$, να βρείτε το ℓ .

γ. Αν f, g οι συναρτήσεις των ερωτημάτων α. και β. αντίστοιχα, να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) + \eta \mu 3x}{\epsilon \varphi x + x g(x)}.$$

(Μονάδες 5+10+10)