

5^ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΚΑΤΕΡΙΝΗΣ
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1. Να λυσετε το συστημα $\begin{cases} 3x - y = \lambda + 2 \\ -6x + 2y = 4 \end{cases}$

2. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + (2\lambda - 1)y = 1 \end{cases}$$

3. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} 2|x| - 3|y| = 1 \\ 3|x| - |y| = 5 \end{cases}$$

4. Αν D η οριζουσα του συστηματος $\begin{cases} (D-2)x - Dy = 3 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ να βρείτε τα x και y .

5. Αν το συστημα $\begin{cases} \lambda x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ είναι αοριστο, να δείξετε ότι το συστημα $\begin{cases} x - \lambda y = \lambda \\ \lambda x - 4y = 3 \end{cases}$ είναι αδυνατο.

6. Αν το συστημα $\begin{cases} \lambda x - 3y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ είναι αδυνατο, να δείξετε ότι το συστημα $\begin{cases} (\lambda - 1)x - 2y = 1 \\ 2x - 2\lambda y = \lambda \end{cases}$ είναι αοριστο.

7. Αν το συστημα $\begin{cases} \lambda x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ είναι αοριστο, να δείξετε ότι το συστημα $\begin{cases} x - \lambda y = \lambda \\ \lambda x - 4y = 3 \end{cases}$ είναι αδυνατο

8. Να βρείτε τα α, β ώστε τα συστήματα $\begin{cases} \alpha x - y = 1 \\ \beta x - 2y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x - \alpha y = 1 \\ x - y = \frac{\beta}{2} \end{cases}$ να είναι συγχρονως αοριστα.

9.A. Να δειχθεί ότι το σύστημα $\left. \begin{array}{l} \lambda^2 x - \psi = 1 \\ x + \psi = 3 \end{array} \right\} (\Sigma)$ έχει μοναδική λύση για κάθε

$\lambda \in \mathfrak{R}$. (x_0, ψ_0) την οποία και να βρείτε.

B. Αν (x_0, ψ_0) η μοναδική λύση του παραπάνω συστήματος να βρεθεί ο

$\lambda \in \mathfrak{R}$ ώστε να ισχύει $x_0 - \psi_0 = 1$

10. Αν το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση και ισχύουν

• $4D_x^2 + D_y^2 = 4D_x D_y$ και • $x - y = 2$

να βρείτε τα x και y

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Εστω μια συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα A . Να δείξετε ότι :
 $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

2. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα A τότε έχει το πολύ μια ρίζα στο A .

3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις

i) $f(x) = 3x^3 + 2$ ii) $g(x) = -2x^3 + 1$

iii) $h(x) = 3 + \sqrt{2-x}$ iv) $k(x) = \sqrt{x}$

v) $f(x) = \frac{1}{x}$ vi) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

4. Εστω συνάρτηση g γνησίως αυξουσα στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι

i) $g\left(\frac{3}{\pi}\right) < g\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ii) $g(2\kappa) \leq g(\kappa^2 + 1)$

5. Εστω γνησίως αύξουσα συνάρτηση f στο \mathbb{R} . Να λύσετε τις ανισώσεις

i) $f(x) > f(5)$ ii) $f(4x+1) > f(2x+5)$

6. Εστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(-1,4)$. Να λύσετε την ανίσωση $f(2x^2 - 7) > 2$.

7. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = (\lambda^2 - 1)x - 3$ είναι γνησίως φθίνουσα .

8. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + 5x - 2$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $f(2015) < f(2016)$.

9. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(3) < f(\pi)$.

i) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f .

ii) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(-\frac{2}{3})$ και $f(-\frac{3}{4})$.

10. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση, έχει ρίζα το 2 και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2.

i) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f

ii) Να δείξετε ότι $f(1) < 0$

iii) Να δείξετε ότι $f(\alpha^2 + 9) \geq f(6\alpha)$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

iv) Να δείξετε ότι $f(\alpha + \frac{1}{\alpha}) \geq 0$, για κάθε $\alpha > 0$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 12$

- i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αυξουσα
- ii) Να δείξετε ότι ο αριθμός 2 είναι ρίζα της f
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$
- iv) Να κάνετε το πίνακα προσήμων των τιμών της συνάρτησης f .
- v) Να λύσετε την ανίσωση $x^3 + 2x > 12$.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x=2$

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x - 2$ παρουσιάζει μέγιστο για $x=1$

3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$ έχει ελάχιστη τιμή το $\frac{1}{2}$ και μετά να βρείτε τη θέση του ελαχίστου.

4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$ παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x=2$ και ελάχιστο στη θέση $x=-2$

5. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων

i) $f(x) = 2x^4 - 1$ ii) $g(x) = 5 - |2x - 3|$ iii) $h(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$ iv) $k(x) = \frac{2}{|x| + 1}$

v) $f(x) = 2|x - 1| - 3$ vi) $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$

6. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
 ii) Να την εξετάσετε ως προς τη μονοτονία.
 iii) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα και τις θέσεις των ακροτάτων.

7. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2, -\frac{1}{3})$ και ισχύει $3f(x)+1 \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f .
 ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη.

8. Εστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-3,1)$, $B(1,2)$ και ισχύει $f^2(x) - 3f(x) + 2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης f
 ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = |f(x) - 1| + |f(x) - 2|$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.
 iii) Να λύστε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.

ΑΡΤΙΑ – ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Να εξετάσετε αν είναι αρτίες ή περιττές οι συναρτήσεις

- i) $f(x) = 5x^6 - 2x^2 + 3$
 ii) $g(x) = 2x^5 - 3x^3 + x$
 iii) $h(x) = |4x - 3| + |4x + 3|$

2. Να εξετάσετε ποιες από τις συναρτήσεις έχουν γραφικές παραστάσεις συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$ και ποιες ως προς την αρχή των αξόνων.

$$\text{i)} f(x) = \sqrt{2 - 3|x|}$$

$$\text{ii)} g(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$\text{iii)} h(x) = \frac{x^3}{|x| - 2}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x + 1$

i) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f(-1)$

ii) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή.

4. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο 3. Να αποδείξετε ότι

$$2014f(-3) + 2015f(3) - 1000f(0) = 0$$

5. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο -2. Να αποδείξετε ότι

$$3f(2) + 5f(-2) - 7f(0) = 0$$

6. Έστω $f : (\alpha, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι άρτια και ισχύει

$$f(1) - f(-1) = \alpha^2 + \beta^2. \text{ Να βρείτε τα } \alpha \text{ και } \beta.$$

7. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη. Να δείξετε ότι η f δεν είναι άρτια.

ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ – ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

1. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

$$\text{i)} f(x) = |x|, \quad g(x) = |x - 1| + 2, \quad h(x) = |x + 2| - 1$$

2. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

$$i) f(x) = 2(x + 1)^2 - 1 \quad ii) g(x) = x^2 - 2x + 2$$

3. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x} + 2, \quad h(x) = \frac{1}{x} - 2$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της f :

i) κατά 1 μονάδα δεξιά

ii) κατά 3 μονάδες κάτω

iii) κατά 2 μονάδες αριστερά και 2 μονάδες προς το πάνω

iv) κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών

$$i) 390^\circ \quad ii) 1200^\circ \quad iii) -1035^\circ$$

2. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών

$$\text{i) } \frac{7\pi}{3} \quad \text{ii) } \frac{25\pi}{4} \quad \text{iii) } -\frac{23\pi}{6}$$

3. Αν $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ να δείξετε ότι $|\sin x| + |\cos x| + \sin x + \cos x = 0$

4. Αν $0^\circ < x < 90^\circ$ να βρείτε το προσήμο της παραστασης

$$A = \eta\mu(180^\circ - x) + \epsilon\phi(90^\circ - x) - \sigma\upsilon\nu(270^\circ - x)$$

5. Να δείξετε τις ισότητες

$$\text{i) } \eta\mu 60^\circ = 2\eta\mu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ \quad \text{ii) } \epsilon\phi 60^\circ = \frac{2\epsilon\phi 30^\circ}{1 - \epsilon\phi^2 30^\circ}$$

6. Να δείξετε ότι $\text{i) } |5\sigma\upsilon\nu x + 2\sigma\upsilon\nu y| \leq 7$ $\text{ii) } |2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x| < 5$

7. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - x + \eta\mu\theta - 2 = 0$ έχει δυο ριζες πραγματικές και ανισες για κάθε γωνία θ .

8. Αν $10\eta\mu^2 x + 7\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$ να βρείτε το x .

9. Αν $\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3}\eta\mu x = 2$ να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .

10. Αν ισχύει $x = 3\eta\mu\theta$ και $y = 2\sigma\upsilon\nu\theta$, να δείξετε ότι $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

11. Αν $x = \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ και $y = \beta\epsilon\phi\theta$ να δείξετε ότι $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

12. Να δείξετε ότι $\begin{vmatrix} \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\sqrt{2}} & \frac{-\eta\mu\chi}{\sqrt{2}} \\ \frac{\eta\mu\chi}{\sqrt{2}} & \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

13. Να δείξετε ότι $(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)^2 = 1 + 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi$

14. Να δείξετε ότι $\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1 - \eta\mu\chi} - \frac{1 - \eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = 2\epsilon\phi\chi$

15. Να αποδείξετε ότι

i) $\epsilon\phi\chi + \sigma\phi\chi = \frac{1}{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi}$ ii) $\epsilon\phi^2\chi + \sigma\phi^2\chi + 2 = \frac{1}{\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi}$

16. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} x\eta\mu\theta - y\sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu\theta \\ x\sigma\upsilon\nu\theta + y\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta \end{cases}$$

i) Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε γωνία θ

ii) Να λυθεί το σύστημα

17. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x\eta\mu\alpha + 1 - \sigma\upsilon\nu\alpha = 0$ με $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και ανίσες .

ii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε το $\eta\mu\alpha$ ώστε να ισχύει $x_1^2 + x_2^2 = 2$

18. Να δείξετε ότι $\eta\mu^2 26^\circ + \eta\mu^2 34^\circ + \eta\mu^2 64^\circ + \eta\mu^2 56^\circ = 2$

19. Να δείξετε ότι $2\eta\mu^2(\pi + \chi) + \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)\epsilon\phi(2\pi - \chi) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) = 1$

20. Να απλοποιήσετε την παρασταση

$$A = \frac{\eta\mu(2\pi + \chi)\sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2} - \chi\right)\sigma\upsilon\nu(3\pi + \chi)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \chi\right)\epsilon\phi(\pi + \chi)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \chi\right)}$$

21. Να δείξετε ότι

$$\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) + \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4} + \chi\right) = 1$$

22. Αν A, B, Γ γωνίες τριγώνου $AB\Gamma$ να δείξετε ότι

$$i) \eta\mu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2(B + \Gamma) = 1$$

$$ii) \eta\mu^2 \frac{A}{2} + \eta\mu^2 \frac{B + \Gamma}{2} = 1$$

23. Να δείξετε ότι

$$\sigma\upsilon\nu 0^\circ + \sigma\upsilon\nu 1^\circ + \sigma\upsilon\nu 2^\circ + \dots + \sigma\upsilon\nu 180^\circ = 0$$

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

1. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις $f(x) = 3\eta\mu \frac{x}{2}$, $g(x) = 1 + \epsilon\phi 2x$ στο διάστημα μιας περιόδου τους .

2. Να παραστήσετε γραφικά στο διάστημα $[0, 3\pi]$ τη συνάρτηση f με $f(x) = \alpha + \beta \sin \frac{2x}{3}$ ($\beta < 0$), αν είναι γνωστό ότι έχει μέγιστο το 5 και η γραφική της παρασταση διέρχεται από το σημείο $M(\pi, \frac{7}{2})$

3. Να κάνετε τη γραφική παρασταση των συναρτήσεων f με

i) $f(x) = 3\eta\mu x$ ii) $f(x) = \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu x$ iii) $f(x) = -\frac{2}{3} \sigma\upsilon\nu x$

4. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f με τύπο

i) $f(x) = \eta\mu 3x$ ii) $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$ iii) $f(x) = \eta\mu \frac{3x}{2}$ iv) $f(x) = \sigma\upsilon\nu(-\frac{x}{3})$

5. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f με τύπο

i) $f(x) = 2\eta\mu 4x$ ii) $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}$ iii) $f(x) = 2\varepsilon\varphi 2x$

6. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f με τύπο

i) $f(x) = 1 + 2\eta\mu x$ ii) $f(x) = 3 - 2\sigma\upsilon\nu 2x$ iii) $f(x) = -1 + 2\varepsilon\varphi \frac{x}{2}$

7. Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο των συναρτήσεων f με τύπο

i) $f(x) = 3\eta\mu 5x$ ii) $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu 3x$ iii) $f(x) = 1 - 5\eta\mu \frac{x}{2}$ iv) $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x - 7$

8. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu^2 x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x$ είναι περιοδικές με περίοδο π .

9. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x$ είναι περιττή και περιοδική

10. Αν ο αριθμός $T > 0$ είναι περίοδος μιας συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι και οι αριθμοί $2T$ και $3T$ είναι περίοδοι της f .

Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

A. Να λύσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

1. $\eta\mu 2x = \eta\mu(2x + \frac{\pi}{3})$

2. $\sigma\upsilon\nu 3x = \sigma\upsilon\nu(3x - \frac{\pi}{4})$

3. $\text{συν}3\chi = \eta\mu(\chi - \frac{\pi}{3})$

4. $\eta\mu\chi = -\eta\mu\frac{\pi}{7}$

5. $\text{συν}\chi = -\text{συν}\frac{\pi}{9}$

6. $\sigma\phi\chi = 1$

7. $\sqrt{2}\sigma\phi\chi - \sqrt{6} = 0$

8. $\text{συν}\chi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. $\eta\mu\chi(\text{συν}\chi - 1) = 0$

10. $\text{συν}\chi(\eta\mu\chi - 1) = 0$

11. $\epsilon\phi^2 3\chi + \epsilon\phi 3\chi = 0$

12. $\sqrt{2}\text{συν}^2\chi - \text{συν}\chi = 0$

13. $\eta\mu\chi\text{συν}\chi + \eta\mu\chi = 1 + \text{συν}\chi$

14. $\epsilon\phi^2\chi - (1 - \sqrt{3})\epsilon\phi\chi - \sqrt{3} = 0$

15. $2\text{συν}^2\chi + \sqrt{3}\eta\mu\chi + 1 = 0$

16. $3(1 - \text{συν}\chi) = \eta\mu^2\chi$

17. $\eta\mu(\chi - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}\text{συν}(\chi - \frac{\pi}{3})$

18. $\sqrt{3}\text{συν}\pi\chi + \eta\mu\pi\chi = 0$

19. $\sigma\phi\chi = 2\text{συν}\chi$

Β. Να λυσετε τις εξισώσεις στα αντιστοιχα διαστηματα

1. $\epsilon\phi\chi = \sqrt{3}, \chi \in [0, 2\pi]$

2. $2\eta\mu\chi + 1 = 0, \chi \in (-\pi, 2\pi]$

3. $\sqrt{2}\text{συν}\frac{\pi\chi}{2} + 1 = 0, \chi \in [-1, 3]$

Γ. Να βρείτε για ποιες τιμες του χ , η συναρτηση f με $f(x) = 2\eta\mu(3\chi - \frac{\pi}{4})$,

$$0 \leq \chi \leq 2\pi$$

εχει τη μεγαλυτη και για ποιες την ελαχιστη τιμη της.

Τριγωνομετρικοι αριθμοι αθροισματος και διαφοραστοζων

1. Να αποδειχθει οτι $\epsilon\phi 3\theta - \epsilon\phi 2\theta - \epsilon\phi\theta = \epsilon\phi 3\theta \epsilon\phi 2\theta \epsilon\phi\theta$

2. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\epsilon\varphi^2 5\alpha - \epsilon\varphi^2 2\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2 5\alpha\epsilon\varphi^2 2\alpha} = \epsilon\varphi 7\alpha\epsilon\varphi 3\alpha$$

3. Αν $0 < \alpha, \beta < \pi/2$ να αποδειχθεί ότι $\eta\mu(\alpha + \beta) < \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta$

4. Να εξεταστεί αν η παρασταση $\epsilon\varphi(\pi/4 + \chi)\epsilon\varphi(3\pi/4 + \chi)$ είναι ανεξάρτητη του χ .

5. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\epsilon\varphi(\alpha + 2\beta) - \epsilon\varphi(\alpha - \beta)}{1 + \epsilon\varphi(\alpha + 2\beta)\epsilon\varphi(\alpha - \beta)} = \epsilon\varphi 3\beta$$

6. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\epsilon\varphi \frac{\pi}{9} + \epsilon\varphi \frac{5\pi}{36}}{1 - \epsilon\varphi \frac{\pi}{9}\epsilon\varphi \frac{5\pi}{36}} = 1$$

7. Αν $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$ να αποδειχθεί ότι $\epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\beta + \epsilon\varphi\beta\epsilon\varphi\gamma + \epsilon\varphi\gamma\epsilon\varphi\alpha = 1$

8. Αν $\alpha + \beta = 5\pi/4$, να αποδείξετε ότι $(1 + \epsilon\varphi\alpha)(1 + \epsilon\varphi\beta) = 2$ (υποτίθεται ότι ορίζονται οι $\epsilon\varphi\alpha, \epsilon\varphi\beta$).

9. Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει

$$\frac{\eta\mu B + \eta\mu(\Gamma - A)}{\sigma\omega(\Gamma - A)} = \epsilon\varphi\Gamma$$

να αποδείξετε ότι $B = \pi/2$ και αντιστρόφως .

10. Να λυθεί στο διάστημα $[0, \pi]$ η εξίσωση $\epsilon\varphi(\pi/4 + \chi) + \epsilon\varphi(\pi/4 - \chi) = -4$

11. Να απλοποιηθεί η παρασταση

$$\frac{1 - 2\eta\mu^2\alpha}{2\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

1. Να δείξετε ότι $\frac{2\eta\mu\chi - \eta\mu 2\chi}{2\eta\mu\chi + \eta\mu 2\chi} = \epsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $4\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu 2\chi = 5$ ii) $4\sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi = 5$

3. Να λύσουν οι εξισώσεις

i) $\eta\mu 2\chi - 3\eta\mu\chi - 3\sigma\upsilon\nu\chi + 1 = 0$

ii) $\epsilon\varphi 2\chi = 2\eta\mu\chi$

iii) $\epsilon\varphi\chi \cdot \epsilon\varphi 2\chi = -3$

4. Να αποδείξετε ότι $(\sigma\upsilon\nu\chi - \sigma\upsilon\nu\psi)^2 + (\eta\mu\chi - \eta\mu\psi)^2 = 4\eta\mu^2\left(\frac{\chi - \psi}{2}\right)$

5. Να αποδείξετε ότι $\epsilon\varphi 9^\circ - \epsilon\varphi 27^\circ - \epsilon\varphi 63^\circ + \epsilon\varphi 81^\circ = 4$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\sigma\upsilon\nu 2\chi + 2\eta\mu\chi = 1$ ii) $\sigma\upsilon\nu\chi = 3\sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2} - 2$

7. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 20^\circ \sigma\upsilon\nu 40^\circ \sigma\upsilon\nu 60^\circ \sigma\upsilon\nu 80^\circ = 1/16$

8. Να αποδείξετε ότι

$$\sin^4 \chi + \sin^4 \left(\frac{\pi}{4} + \chi \right) + \sin^4 \left(\frac{\pi}{2} + \chi \right) + \sin^4 \left(\frac{3\pi}{4} + \chi \right) = \frac{3}{2}$$

9. Για κάθε χ να δείξετε ότι $5 + \sin \chi + 2 \sin 2\chi > 0$

10. Να λύσετε την εξίσωση $\eta \mu^3 \chi \sin \chi - \eta \mu \chi \sin^3 \chi = 1/4$

11. Αν $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$ να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

1. Να κάνετε τη διαίρεση $(2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 1) : (x^2 - 2x + 3)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης .

2. i) Να βρείτε τα α, β ώστε τα πολυώνυμα $\chi - 1$ και $\chi + 2$ να είναι παραγοντές του πολυωνυμου $P(\chi) = (2\alpha - \beta)\chi^3 + 3\alpha\chi^2 - (5\beta - 2\alpha)\chi + \alpha + \beta + 1$

ii) Για τις παραπάνω τιμές των α και β να αναλύσετε το $P(\chi)$ σε γινόμενο τριών πρωτοβαθμιών παραγοντών .

3. Βρείτε τα α και β ώστε το $P(x) = x^v + \alpha x + \beta$, $v \geq 2$ να διαιρείται με το $(x-1)^2$.

4. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παραγοντες τους $x-\alpha$ και $x-\beta$ ($\alpha \neq \beta$) να δείξετε ότι και το $(x-\alpha)(x-\beta)$ είναι παραγοντες του $P(x)$.

5. Αν οι διαιρέσεις ενός πολυωνυμου $P(x)$ με τα διωνυμα $x+1$ και $x-2$ δινουν αντιστοιχα υπολοιπα 2 και -3, να βρείτε το υπολοιπο της διαιρεσης $P(x) : (x^2 - x - 2)$.

6. Αν $\Pi(x)$ είναι το πηλικο της διαιρεσης $P(x) : (x-\alpha)$, να δείξετε ότι το υπολοιπο της διαιρεσης $P(x) : (x-\alpha)^2$ είναι $u(x) = \Pi(\alpha)x + P(\alpha) - \alpha\Pi(\alpha)$.

7. Εστω πολυωνυμο $P(x)$ με $P(0)=2$, $P(1)=1$ και $P(-2)=10$. Να βρείτε το υπολοιπο της διαιρεσης $P(x) : (x^3 + x^2 - 2x)$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να λυσετε τις ανισωσεις i) $x^3 + 2x - 30 \geq 0$ ii) $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$
iii) $(x+2)^3 \leq 8x^2 + 16x$

2. Να λυσετε την εξισωση $6x^3 - 7x^2 - 7x + 6 = 0$

3. Να λυσετε την εξισωση $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

4. Να λυσετε τις εξισώσεις i) $x^{10} + 31x^5 - 32 = 0$ ii) $(2x-1)^8 - 80(2x-1)^4 - 81 = 0$

5. Να λυσετε την εξίσωση $(2x^2 + 2x - 3)^3 - 3(x^2 + x - 2)^2 + 2x(x+1) = 5$

6. Να βρείτε 4 διαδοχικούς ακέραιους με γινόμενο 1680.

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - x - 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο διάστημα $(1, \sqrt{2})$

8. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $(3\lambda - 1)x^2 + (5\lambda - 2)x + 7 - 2\lambda = 0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα μεταξύ -1 και 1

9. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2k^4 + 7)k^6 - k^2x^5 + (k-1)x^3 - kx - 3 = 0$ ($k \in \mathbb{R}$) έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

10. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{100} + 2ax + 2 = 0$ ($a \in \mathbb{R}$) δεν έχει ακέραιες ρίζες.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

1. Να λυσετε την ανίσωση $\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 2} \geq \frac{x}{2}$

2. Να λυσετε τις εξισώσεις i) $\sqrt{9x - 2} = 3x - 2$ ii) $\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} = x + 3$

3. Να λυσετε τις εξισώσεις i) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-19} = 10$ ii) $\sqrt{11-2x} - \sqrt{2(x+1)} = -1$

4. Να λυσετε την εξίσωση $(x-1)^{\frac{1}{2}} + 6(x-1)^{\frac{1}{4}} = 16$

5. Να λυσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2 - 6x + 5} = x - \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

6. Να λυσετε την $2\eta\mu^8 x - 9\eta\mu^6 x + 14\eta\mu^6 x - 9\eta\mu^2 x + 2 = 0$

7. Να αποδείξετε ότι το πολυωνυμο $f(x) = \alpha x^5 + \beta x + \gamma$ και $g(x) = \gamma x^5 + \beta x^4 + \alpha$ ($\alpha \gamma \neq 0$) έχουν ριζες αντιστροφες. Ποια σχέση πρέπει να συνδέει τα α, β, γ ώστε να έχουν κοινή ρίζα.

8. Αν το πολυωνυμο $P(x)$ διαιρεί το $Q(x)$ και το $Q(x)$ διαιρεί το $P(x)$, να δείξετε ότι υπάρχει σταθερος $c \neq 0$ ώστε να είναι $P(x) = cQ(x)$

9. Εστω το πολυωνυμο $P(x)$ με σταθερο ορο 1. Το $P(x)$ διαιρούμενο με το $x - \alpha$ δίνει πηλικο $x^2 - 3x + 4$ και διαιρούμενο με το $x - \beta$ δίνει πηλικο $x^2 - 4x + 2$. Να βρείτε το $P(x)$ και τα α, β

10. Να λυσετε την αντιστροφή εξίσωση $x^6 - 2x^5 + x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$

11. Να λυσετε την εξίσωση $(\omega^2 - \omega + 1)^4 - 10\omega^2(\omega^2 - \omega + 1)^2 + 9\omega^4 = 0$

12. Να αποδείξετε ότι το πολυωνυμο $P(x) = x^{2v+1} + (x-1)^{v+2}$ διαιρείται με το $f(x) = x^2 - x + 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο (1^η ΟΜΑΔΑ)

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ - ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\text{i)} \sqrt{2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} \quad \text{ii)} (9\sqrt{3})^{x+1} = 27^x$$

2. Να βρεθούν τα x για τα οποία ισχύει

$$\text{i)} 5^{\sqrt{x}} \leq \sqrt{5^x} \quad \text{ii)} 2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-1} \leq 2$$

3. Να λυθεί η ανίσωση $(e^x - 1)(4 - 2^x)(x^2 + 2x) \leq 0$

4. Να λυθεί η ανίσωση $a^{x^2} < a^{x+1}$ αν είναι γνωστό ότι αληθεύει για $x=0$ (όπου $a > 0$)

5. Να λυθεί η εξίσωση $(\sin^2 1)^x + (1 + \cos^2 1)^x = 2$

6. Να λυθούν οι ανισώσεις i) $(3x^2 - 6x + 5)^{-6x+5} \geq (3x^2 - 6x + 5)^{-x^2}$

$$\text{ii)} (6x^2 - 4x + 1)^{-4x+1} \geq (6x^2 - 4x + 1)^{4x-1}$$

7. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = 2x - 4$, $g(x) = \frac{3 - 2^x}{2^x + 1}$ είναι "1-1"

8. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{2x}$ δεν είναι "1-1"

9. Να λυθεί η εξίσωση $\log(3x-2) - 2 = \frac{1}{2} \log(x+2) - \log 50$

10. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί $\log x$, $\log 2\sqrt{3}$, $\log(x-1)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ;

11. Να λυθεί η εξίσωση $5^{3x-1} = 2^{x+3}$.

12. Για ποιες τιμές του a η εξίσωση $x^2 - 6x + 5 = \log_2 a$ έχει δύο πραγματικές και ανίσες ρίζες ; .

13. Να βρεθούν τα x για τα οποία $\sqrt{x}^{\log_3 x - 1} = 3$

14. Να λυθεί η εξίσωση $|\log x| + \log x = 4$

15. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x^{\log y} = 2 \\ xy = 20 \end{cases}$

16. Να λυθεί η ανίσωση $\log_{x-1}(x+1) < 2$

17. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω είναι συναρτήσεις "1-1"

i) $f(x) = 2e^{-x} + 5$ ii) $f(x) = 4 - 2\sqrt[3]{1 - 3x}$

18. Να λύσετε την εκθετική εξίσωση $3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} = 4^x + 2^{2x-1}$

19. Να λύσετε την εξίσωση $x^2(2^{|x-3|+4} - 2^{x+1}) = 2^{|x-3|+2} - 2^{x-1}$

20. Σε μια αριθμητική προοδο ο πρώτος όρος είναι $\log a$ και ο δεύτερος όρος είναι $\log b$. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι $S_n = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\beta^{n(n-1)}}{\alpha^{n(n-3)}} \right)$

21. Αν $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ να δείξετε ότι $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$

22. Να λύσετε τις εξισώσεις i) $3^{2x-1} = 5$ ii) $2^{2^x} = 3$

23. Αν οι α, β είναι θετικοί με $\alpha^3 + \beta^3 - 6\alpha^2\beta - 6\alpha\beta^2 = 0$, να αποδείξετε ότι

$$\log\left(\frac{\alpha + \beta}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log\alpha + \log\beta)$$

24. Να λύσετε τις παρακάτω λογαριθμικές συναρτήσεις

i) $\log_5(3x+2) - \log_5(x+1) = \log_5 2$ ii) $\log(x-1) + \log(x+2) = 2(1 - \log 5)$

25. i) Για κάθε $\alpha, \beta > 0$ να δείξετε ότι $\alpha^{\log\beta} = \beta^{\log\alpha}$ ii) Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 200 \\ \log \sqrt{xy} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

26. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις i) $\log_{1/5}(3^x + 2) \leq 2x \log_{1/5} 3$ ii) $x^{\ln x} > e$

27. Αν $\log_{xy} = \log_y z \log_z x$, να δείξετε ότι $x=y$ ή $x=1/y$.

28. Αν $\frac{\log \alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\log \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{\log \gamma}{\alpha - \beta}$, να δείξετε ότι $\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma = 1$

29. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha \neq \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha^\alpha \beta^\beta > \alpha^\beta \beta^\alpha$

30. Να λύσετε την ανίσωση $(x^2 + x + 1)^x < 1$

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\alpha + \ln(e^x - 3)$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

ii) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(\ln 4, 4)$ τότε

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα xx' όταν $\alpha = 2$

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αυξουσα.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

iii) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 2$.

33. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x^{\log y} = 10^2 \\ xy = 10^3 \end{cases}$

34. Να παρασταθούν γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων οι συναρτήσεις

$$f(x) = 3^{|x|}, \quad g(x) = 3^{-|x|}$$

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 7}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

ii) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αυξουσα

iii) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού χ για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τον άξονα xx' .

iv) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού χ για τις οποίες είναι $f(x) = f(2x)$

(2^η ΟΜΑΔΑ)

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ - ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις α) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

β) $8^x + 2^{x+1} \cdot 5^{2x} - 3 \cdot 125^x = 0$ γ) $9^{\sin^2 x} + 9^{\sin 2x} = 4$

δ) $2^{\sin 2x} + 4^{\eta \mu^2 x} = 3$

2. Να λύσετε τις ανισώσεις α) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 < 0$

β) $e^{2x} - (e-2)e^x - 2e < 0$ γ) $81^x + 2 \cdot 27^x - 3^{x+1} < 0$ δ) $\frac{e^x - e}{e^x - 1} > 0$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - e^{-x}}}$

4. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 3^{2x-y} = 27 \\ 5^{5x-4y} = 1 \end{cases}$.

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

α) $A = \ln 1 + 2 \ln e - 3 \ln \frac{1}{e^2}$ β) $B = (\sqrt{e})^{\ln 3 + 2 \ln \sqrt{e}}$

6. Να αποδείξετε ότι α) $\frac{1}{2} \ln 9 - \frac{1}{3} \ln 64 + \ln 4 = \ln 3$

β) $\frac{\log \sqrt{125} + \log \sqrt{27} - \log \sqrt{8}}{\log 15 - \log 2} = \frac{3}{2}$

7. Να βρείτε τη λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = k \ln x$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $B(e, 2)$.

8. Εστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x \cdot \ln \frac{7-x}{7+x}$ α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αρτία.

9. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $\ln(x^2 - 3x) - \ln(5 + x) = 0$ β) $2\log x - \log(x + 6) = \log 3$ γ) $2\log^2 x + 5\log x - 3 = 0$

10. α) Να δείξετε ότι $2^{\ln x} = x^{\ln 2}$ β) Να λύσετε την εξίσωση $4^{\ln x} - 9 \cdot x^{\ln 2} + 8 = 0$.

αντίστοιχο

avrtton