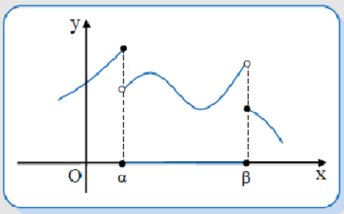
ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

Σχόλιο [A1]: ΜΑΥΡΙΔΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ 2020

Συνέχεια Συνάρτησης σε Διάστημα. Το Θεώρημα του Bolzano

Ορισμός

- Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος (α, β).



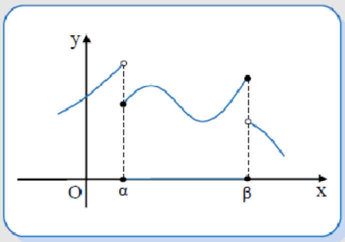
Ορισμός

- Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]** του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος (α, β) και επιπλέον ισχύουν

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$$

και

$$\lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta).$$



- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ το οποίο είναι γνήσιο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, τότε η f δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής στα σημεία α και β.

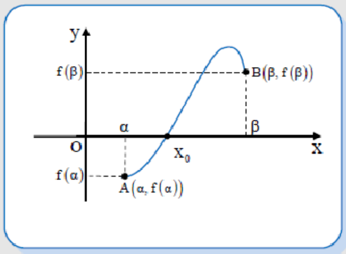
Θεώρημα (Bolzano)

Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι **συνεχής** στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

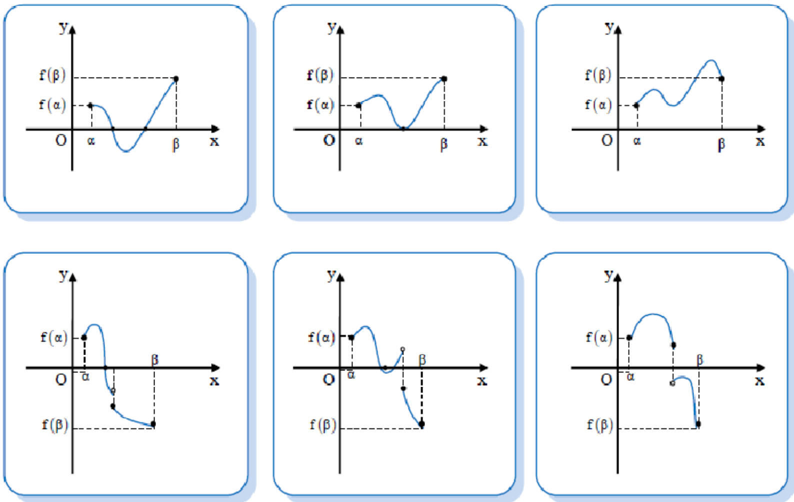
τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Δηλαδή, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα (α,β).

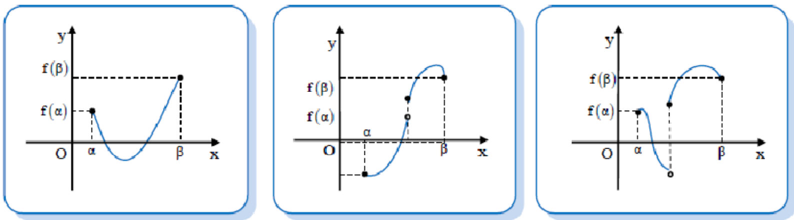


- Για κάθε συνάρτηση f η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano σε κάποιο διάστημα $[\alpha, \beta]$ η C_f έχει με τον άξονα $x'x$ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

- Αν κάποια από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano δεν ισχύει, τότε το συμπέρασμα του θεωρήματος μπορεί να ισχύει, μπορεί όχι.



- Το αντίστροφο του θεωρήματος του Bolzano δεν ισχύει. Δηλαδή, υπάρχουν συναρτήσεις f ορισμένες σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και τέτοιες, ώστε $f(x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, οι οποίες δεν ικανοποιούν μία τουλάχιστον από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano.



Ερωτήσεις «Σωστό ή Λάθος»

i) Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της είναι συνεχής σε κάθε σημείο διαστήματος $[\alpha,\beta]$.

ii) Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα (α,β) και τέτοια, ώστε $f(\alpha)f(\beta)<0$, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$.

iii) Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και τέτοια, ώστε $f(\alpha)f(\beta)\geq 0$ η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο (α,β).

iv) Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και τέτοια, ώστε η εξίσωση $f(x)=0$ να είναι αδύνατη στο (α,β) ισχύει $f(\alpha)f(\beta)\geq 0$.

v) Υπάρχουν συναρτήσεις ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και τέτοιες, ώστε $f(x_0)=0$ για κάποιο $x_0\in(\alpha,\beta)$ οι οποίες δεν ικανοποιούν μια τουλάχιστον από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano.

★ **178.** **Δίνεται η συνάρτηση** $f(x)=\begin{cases} x^4+\alpha x-\alpha, & x\neq 1\\ \alpha^2, & x=1\end{cases}$.
η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0,1]$.

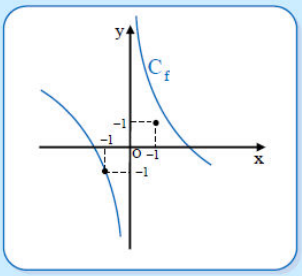
i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ **έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.**

179. **Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης** $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ **για την οποία ισχύει**

$$f(-1)f(1)=-1<0.$$

Όμως, η εξίσωση $f(x)=0$ **είναι αδύνατη στο διάστημα** $(-1,1)$. **Υπάρχει αντίφαση των παραπάνω με το θεώρημα Bolzano;**



★ **181.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{5-4\eta\mu x}{e^x+x^2-3}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(0)\cdot f(1)<0$.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη.

iv) Υπάρχει αντίφαση των παραπάνω με το θεώρημα του Bolzano; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

189. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$f(x)=(g(x)-x)^2+4 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής με $g(1)<1$ και $g(2)>2$.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$g(x_0)-x_0=0$$

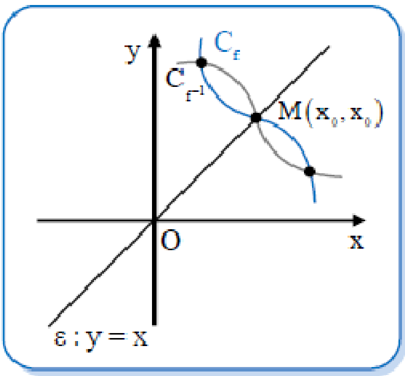
ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

191. Έστω συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε $f(0)=f(1)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.



193. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ και

$$f^3(x)+2x^2f(x)=4\eta\mu^3 x \quad \text{για κάθε} \quad x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι: i) $\lambda^3+2\lambda-4=0$ ii) $1<\lambda<2$.

194. Δίνεται τρίγωνο ΑΟΒ με $A(0,3)$, $O(0,0)$ και $B(4,2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο Μ στο εσωτερικό του ύψους του ΒΔ τέτοιο, ώστε $(MO)=(MA)+(MB)$.