

## ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

### Επαναληπτικές ασκήσεις

#### ΑΣΚΗΣΗ 1

Αν γνωρίζουμε ότι ο  $x$  είναι πραγματικός αριθμός με  $3 \leq x \leq 5$ , τότε:

- Να αποδείξετε ότι  $x - 5 \leq 0 < x - 2$ .
- Να λύσετε την εξίσωση  $|x - 2| - |x - 5| = 2$ .

#### ΑΣΚΗΣΗ 2

Αν για τον πραγματικό αριθμό  $x$  ισχύει  $|2x| < 2$ , τότε:

- Να αποδείξετε ότι  $-1 < x < 1$ .
- Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in (-1, 1)$ , ισχύει  $x^2 < 1$ .

#### ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  για τους οποίους ισχύει  $1 \leq \beta \leq 2$  και  $2 \leq \alpha \leq 4$ .

- Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των  $\alpha$  και  $\beta$  είναι μικρότερη ή ίση του 3.
- Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.
- Να δείξετε ότι  $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$ .
- Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  για τους οποίους ισχύει  $\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right|$ .

#### ΑΣΚΗΣΗ 4

Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και  $x$  αντίστοιχα.

- Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων  $|x - 5|$  και  $|x - 9|$ .
- Αν ισχύει  $|x - 5| = |x - 9|$ , τότε:
  - Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό  $x$  που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

### ΑΣΚΗΣΗ 5

Αν είναι  $A = 2 - \sqrt{3}$ ,  $B = 2 + \sqrt{3}$ , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι  $A \cdot B = 1$ .

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $\Pi = A^2 + B^2$ .

### ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$ , με  $\alpha = 1 + \sqrt{2}$  και  $\beta = 1 - \sqrt{2}$ .

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $A = \alpha^2 - \beta^2$ .

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$ .

γ) Αν  $A = 4\sqrt{2}$  και  $B = 2$ , να δείξετε ότι  $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$ .

### ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνεται η παράσταση  $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ .

α) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός  $x$ , ώστε η παράσταση  $K$  να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Αν  $-2 < x < 3$ , να αποδείξετε ότι η παράσταση  $K$  είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του  $x$ .

### ΑΣΚΗΣΗ 8

Δίνεται η παράσταση  $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$ .

α) Για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η παράσταση B; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του  $x$  σε μορφή διαστήματος.

β) Για  $x = 4$ , να αποδείξετε ότι:  $B^2 + 6B = B^4$ .

## ΑΣΚΗΣΗ 9

Δίνονται οι ετερόσημοι αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$ , με  $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}$  και  $\beta = \sqrt{2} - 2$ .

Να δείξετε ότι:

α)  $\alpha^2 + \beta^2 = 15$ .

β)  $\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = 5$ .

## ΑΣΚΗΣΗ 10

Δίνεται η παράσταση  $A = |x - 2| + 3$

α) Να βρείτε

i. Την τιμή της παράστασης  $A$  για  $x = 2^3 - 3^2$ .

ii. Τις τιμές του  $x$ , ώστε να ισχύει  $A = 5$ .

β) Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση  $A$  να πάρει την τιμή 2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.